10a 2.Klassenarbeit 5.12.2007

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/10/10index.html

A1. Ein Würfel wird 600 mal geworfen. Innerhalb welchen Intervalls liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 69% die relative Häufigkeit dafür, dass eine gerade Zahl gewürfelt wurde?
Lösung:

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{600}}$$
$$\sigma = 0,02$$

Somit ergibt sich das Intervall:

$$[0,5 - 0,02; 0,5 + 0,02]$$
$$[0,48; 0,52]$$

A2. Bei der Auswertung der Ergebnisse eines Münzwurfexperiments stellt man fest, dass die relative Häufigkeit, dass "Kopf" gefallen ist, zu 96% innerhalb des Intervalls $[0,41; 0,59]$ liegt. Wie oft wurde die Münze geworfen, wenn man davon ausgeht, dass die Münze entsprechend der normalen Wahrscheinlichkeitsverteilung gefallen ist?
Lösung:
Der Radius des Intervalls beträgt $0,09$. Somit gilt:

$$0,09 = \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$11,11 = \sqrt{n}$$
$$123,46 = n$$

Man kann also davon ausgehen, dass die Münze ca. 123 mal geworfen wurde.

A3. Nach 1000 Würfen einer Münze stellt man fest, dass die relative Häufigkeit dafür, dass "Zahl" gefallen ist zu 69%, im Intervall $[0,47; 0,53]$ liegt. Kann man davon ausgehen, dass die Münze entsprechend der normalen Wahrscheinlichkeitsverteilung gefallen ist?
Lösung:
Bei 1000 Würfen wäre der Radius für die Wahrscheinlichkeit:

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{1000}}$$
$$\sigma = 0,0158$$

Die Verteilung müsste also "enger" um die $0,5$ liegen. Die Münze ist nicht regulär gefallen.

A4. Werner hat zu seinem 16. Geburtstag von seinem Onkel ein Sparbuch mit 500€ bekommen. Dort wird es mit 4% verzinst. Mit welchem "Wachstumsfaktor" wird das Geld von Jahr zu Jahr multipliziert und wieviel Geld hat Werner an seinem 21. Geburtstag?
Lösung:
Der Faktor ist $1,04$. Somit ergibt sich:

$$K_{21} = 500 \cdot 1,04^5$$
$$= 608,33$$

Er hat ca. 608,33€ .

A5. Bei den folgenden Tabellen wird entweder exponentielles oder lineares Wachstum einer Größe dargestellt. Gibt jeweils an, um welche Art Wachstum es sich handelt und gibt an, wie groß der Zuwachs (lineares Wachstum) oder der Wachstumsfaktor (exponentielles Wachstum) ist.

a)

x	1	2	3	5
f(x)	1,02	3,05	5,08	9,14

b)

x	1	2	3	5
f(x)	1,02	2,14	4,50	19,84

Lösung:
a) Lineares Wachstum mit Zuwachs 2,03 pro Einheit
b) Exponentielles Wachstum mit Wachstumsfaktor 2,1

A6. Zwei Bankhäuser machen ihren Kunden jeweils ein Angebot. Die Bank Goldmann wirbt damit, dass das Kapital im ersten Jahr mit 4,5% verzinst wird, im zweiten Jahr mit 5%, im dritten mit 5,5%, im vierten mit 6% und im fünften mit 6,5%. Die Bank Sorglos bietet dagegen eine Verzinsung für 5,5% bei einer fünfjährigen Einlage. Welches Angebot ist das günstigere?
Lösung:
Bei der Bank Goldmann erreicht man folgende Steigerung des Kapitals:

$$K \cdot 1,045 \cdot 1,05 \cdot 1,055 \cdot 1,06 \cdot 1,065 = K \cdot 1,3068$$

Bei Sorglos gibt es:

$$K \cdot K \cdot 1,055^5 = K \cdot 1,307$$

Das Angebot bei Sorglos ist also günstiger.

A7. Bei einem bestimmten radioaktiven Material sind zu Beginn eines Versuchs 100000 Atome vorhanden. Nach 3 Jahren sind noch 98000 Atome vorhanden. Bestimme die Funktion, die den radioaktiven Zerfall beschreibt. Berechne damit die ungefähre Halbwertzeit des Materials.
Lösung:

$$\begin{array}{crcl} I & 100000 & = & c \cdot a^0 \\ II & 98000 & = & c \cdot a^3 \\ \\ \Rightarrow & c & = & 100000 \\ II & 98000 & = & 100000 \cdot a^3 \\ \Leftrightarrow & 0,98 & = & a^3 \\ \Leftrightarrow & 0,9933 & \approx & a \end{array}$$

Die Funktionsgleichung lautet daher: $f(x) = 100000 \cdot 0,9933^x$. Durch Einsetzen in diese Gleichung erhält man, dass die Halbwertzeit ca. 103 Jahre beträgt.

A8. Berechne jeweils die Unbekannte:

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} & x = \log_2(4) & \text{b)} & x = \log_6(6) & \text{c)} & x = \log_{12}(12^{-4}) \\ \text{d)} & \log_x(2) = 2 & \text{e)} & \log_x(10) = \frac{1}{2} & \text{f)} & \log_{-x}(8) = -3 \\ \text{g)} & \log_2(x) = 3 & \text{h)} & \log_3(x) = 4 & \text{i)} & \log_1 0(x) = 3 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} & 2 & \text{b)} & 1 & \text{c)} & -4 \\ \text{d)} & \sqrt{2} & \text{e)} & 100 & \text{f)} & -512 \\ \text{g)} & 8 & \text{h)} & 81 & \text{i)} & 1000 \end{array}$$

A9. Zerlege und vereinfache soweit wie möglich:

$$\text{a)} \quad \log_a(ab) \quad \text{b)} \quad \log_a\left(\frac{a^2}{bc^3}\right)$$

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl} \text{a)} & \log_a(a) + \log_a(b) & = & 1 + \log_a(b) \\ \text{b)} & 2\log_a(a) - [\log_a(b) + 3\log_a(c)] & = & 1 - \log_a(b) - 3\log_a(c) \end{array}$$

A10. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung: $5 = 7^x$.
Lösung:

$$\begin{aligned} 5 &= 7^x \\ \lg(5) &= x \lg(7) \\ 0,8271 &= x \\ \mathbb{L} &= \{0,8271\} \end{aligned}$$