10a 3.Klassenarbeit 27.2.2008

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/10/10index.html

A1. Berechne die folgenden Logarithmen:

$$\begin{array}{llllll} a) & \log_a(a^2) & b) & \log_a\left(\frac{1}{a}\right) & c) & \log_{\sqrt{a}}(a) \\ d) & \log_{a^2}(a) & e) & \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{a}\right) & f) & \log_{\sqrt{a}}(a^r) \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{llllllllllll} a) & 2 & b) & -1 & c) & 2 & d) & \frac{1}{2} & e) & -2 & f) & 2r \end{array}$$

A2. Löse die folgenden Gleichungen nach x auf. Es braucht **keine** Lösung der Gleichung angegeben zu werden.

$$\begin{array}{llll} a) & \log_2(x) = 3 & b) & \lg(x) = \sqrt{2} \\ c) & \log_x(a) = -2 & d) & \log_x(3) = 5 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{llllllll} a) & x = 2^3 & b) & x = 10^{\sqrt{2}} & c) & x = a^{-\frac{1}{2}} & d) & x = 3^{\frac{1}{5}} \end{array}$$

A3. Zerlege die folgenden Logarithmen, wenn es möglich ist. Gibt es keine Möglichkeit der Zerlegung, dann muss dieses angegeben werden!

$$\begin{array}{llll} a) & \log_{(a+b)}(a+b) & b) & \log_{(a+b)}(a^2+2ab+b^2) \\ c) & \log_{(a+b)}(a^2+b^2) & d) & \log_a(a^2+ab) \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{llllllll} a) & 1 & b) & 2 & c) & \text{Nicht zerlegbar} & d) & \text{Nicht zerlegbar} \end{array}$$

A4. Fasse zu einem Logarithmus zusammen.

$$\begin{array}{llll} a) & \lg(a)+\lg(b) & b) & \lg(2a)-\lg(2b) \\ c) & \lg(a)-2 & d) & \log_a(b)+\log_a(c)-5 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{llllllll} a) & \lg(ab) & b) & \lg\left(\frac{a}{b}\right) & c) & \lg(a)-\lg(100) = \lg\left(\frac{a}{100}\right) & d) & \log_a(bc)-\log_a(a^5) = \log_a\left(\frac{bc}{a^5}\right) \end{array}$$

A5. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen. Runde die Ergebnisse ggf. auf zwei Dezimalstellen.

$$\begin{array}{llll} a) & 7,5^x = 3,1 & b) & 5 = 23 \cdot (0,2)^{\frac{3}{x}} \\ c) & 2^x \cdot 4^{x_2} = 8^{x+x^2} & d) & 2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3} = 224 \end{array}$$

Lösung:

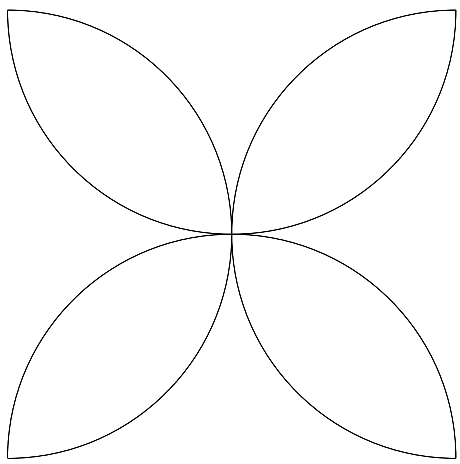
a)
$$\begin{aligned}
7,5^x &= 3,1\\
x \cdot \lg(7,5) &= \lg(3,1)\\
x &= \tfrac{\lg(3,1)}{\lg(7,5)}\\
x &\approx 0,56\\
\mathbb{L} &= \{0,56\}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
5 &= 23 \cdot (0,2)^{\frac{3}{x}}\\
\tfrac{5}{23} &= 0,2^{\frac{3}{x}}\\
\lg(\tfrac{5}{23}) &= \tfrac{3}{x}\lg(0,2)\\
\tfrac{\lg(\frac{5}{23})}{\lg(0,2)} &= \tfrac{3}{x}\\
\tfrac{\lg(0,2)}{\lg(\frac{5}{23})} &= \tfrac{x}{3}\\
\tfrac{\lg(0,2)}{\lg(\frac{5}{23})} \cdot 3 &= x\\
3,16 &\approx x\\
\mathbb{L} &= \{3,16\}
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
2^x \cdot 4^{x^2} &= 8^{x+x^2}\\
2^x \cdot 2^{2x^2} &= 2^{3x+3x^2}\\
2^{2x^2+x} &= 2^{3x+3x^2}\\
2x^2 + x &= 3x + 3x^2\\
0 &= x^2 + 2x\\
0 &= x(x+2)\\
x = 0 &\vee x = -2\\
\mathbb{L} &= \{-2; 0\}
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} &= 224\\
2^{x+1}(1+2+2^2) &= 224\\
2^{x+1} \cdot 7 &= 224\\
2^{x+1} &= 32\\
2^{x+1} &= 2^5\\
x+1 &= 5\\
x &= 4\\
\mathbb{L} &= \{4\}
\end{aligned}$$

A6. Gegeben ist die folgende Figur:



Berechne die Länge der Umfangslinie und die Fläche der Figur, wenn das Quadrat, das aus den Spitzen der Figur gebildet wird, eine Seitenlänge von 10cm hat.

Lösung:

Der Umfang der Figur besteht aus vier Halbkreisen mit jeweils dem Radius 5cm. Daher ist der Umfang:

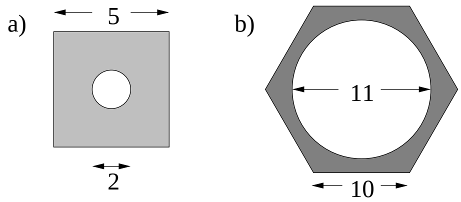
$$\begin{aligned}
U &= 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \pi \cdot \frac{180}{360}\\
&= 20 \cdot \pi
\end{aligned}$$

Die Fläche kann u.a. folgendermaßen berechnet werden: Vier Halbkreise überlappen sich. Addiert man ihre Inhalte, dann werden die Flächen der Figur doppelt gezählt. Somit wäre dann diese

Summe gleich der Quadratsumme plus einmal der Fläche der Figur. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &= A_{4 \text{ Halbkreise}} - A_{\text{Quadrat}} \\ &= 4 \cdot 5^2 \cdot \pi \cdot \frac{180}{360} - 10^2 \\ &= 50\pi - 100 \\ &\approx 57,08 \end{aligned}$$

A7. Gegeben sind die beiden folgenden Figuren mit ihren Abmessungen in Millimetern. Berechne jeweils die schraffierte Fläche!



Lösung:

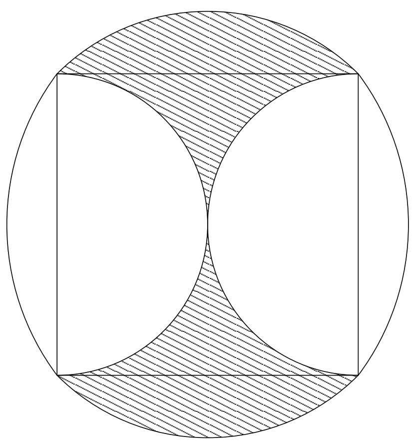
a) Die schraffierte Fläche ist gleich der Quadratfläche minus der Kreisfläche. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &= 5^2 - 2^2\pi \\ &= 25 - 4\pi \\ &\approx 12,43 \end{aligned}$$

b) Die schraffierte Fläche ist gleich der Sechseckfläche minus der Kreisfläche. Die Sechseckfläche ist dabei das Sechsfache eines gleichseitigen Dreiecks mit 10 Millimetern Seitenlänge:

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &= 10 \cdot h \cdot \frac{1}{2} \\ 10^2 &= h^2 + 5^2 \\ 100 &= h^2 + 25 \\ 75 &= h^2 \\ h &= \sqrt{75} \\ \Rightarrow A_{\text{Dreieck}} &= 5\sqrt{75} \\ \Rightarrow A_{\text{Sechseck}} &= 30\sqrt{75} \\ \Rightarrow A_{\text{Schraffiert}} &= 30\sqrt{75} - 5,5^2\pi \\ &\approx 164,77 \end{aligned}$$

A8. Berechne Umfang und Fläche der schraffierten Figur, wenn die Seitenlänge des Quadrats 10cm beträgt.



Lösung:

Die Diagonale des Quadrats hat die Länge:

$$\begin{aligned} d^2 &= 10^2 + 10^2 \\ d^2 &= 100 + 100 \\ d^2 &= 200 \\ d &= \sqrt{200} \end{aligned}$$

Die halbe Diagonale hat daher die Länge: $\sqrt{50}$. Damit ist der Umfang gleich zwei Viertelkreisen mit Radius $\sqrt{50}$ plus zwei Halbkreisen mit Radius 5:

$$\begin{aligned} U &= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \pi + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \pi \\ &= \sqrt{50}\pi + 10\pi \\ &\approx 53,63 \end{aligned}$$

Die Fläche ist gleich der großen Kreisfläche minus den beiden kleinen Halbkreisen minus den beiden Seitenabschnitten rechts und links.

$$\begin{aligned} A_{\text{großer Kreis}} &= \sqrt{50}^2 \cdot \pi \\ &= 50\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{zwei kleine Halbkreise}} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2\pi \\ &= 25\pi \end{aligned}$$

Die Fläche der Seitenabschnitte ist gleich einem Viertel von dem großen Kreis minus dem Dreieck.

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &= \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{Kreisabschnitt}} &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{50}^2\pi - 25 \\ &= \frac{50}{4}\pi - 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{schraffiert}} &= 50\pi - 25\pi - (\frac{25}{2}\pi - 25) \\ &= 25\pi - (\frac{25}{2}\pi - 25) \\ &\approx 64,27 \end{aligned}$$