10a 4.Klassenarbeit 30.4.2008

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/10/10index.html

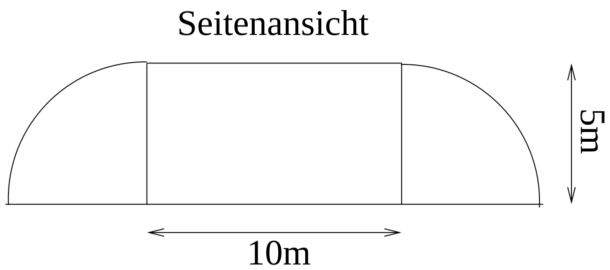
A1. Das Pantheon in Rom gilt als besterhaltenes Bauwerk der römischen Antike (Neubau des Pantheon unter Hadrian 120-125 n.Chr.) und als höchste Leistung römischer Innenbaukunst. Es ist im wesentlichen ein zylindrischer Raum mit einer aufgesetzten Halbkugel (Diese Halbkugel war für 1600 Jahre die größte Kuppel der Welt!). Die Höhe des Raumes ist gleich seinem Durchmesser (43,20m). Berechne den Rauminhalt des Pantheons.

Lösung:

Der Radius des Zylinders ist gleich dem Radius der Halbkugel: $r = \frac{43,20}{2} = 21,60$m. Die Höhe des Raumes ist gleich der Höhe des Zylinders plus der Höhe (dem Radius) der Halbkugel. Also ist die Höhe des Zylinders gleich dem Radius 21,60m. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Zyl.}} + V_{\text{Halbk.}} \\ &= r^2 \cdot \pi \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi \\ &= r^3 \cdot \pi + \frac{2}{3} r^3 \cdot \pi \\ &= \frac{5}{3} r^3 \cdot \pi \\ &= \frac{5}{3} 21,60^3 \cdot \pi \\ &\approx 52766,7 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

A2. Für die Polarstation 'Eiskalt' soll eine neue Unterkunft errichtet werden. Sie besteht aus einem Halbzylinder an den an den Enden viertelkugelförmige Abschlüsse angesetzt sind.



Für die Oberfläche soll ein spezieller, isolierender Kunststoff verwendet werden, der pro Quadratmeter 6587€ kostet. Wieviel Geld muss das Forschungsministerium für die Oberfläche der Unterkunft einplanen?

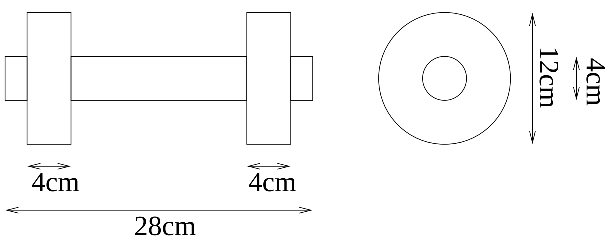
Lösung:

Die Oberfläche der Station besteht aus einer halben Zylindermantelfläche plus der Oberfläche einer Halbkugel (=2 Viertelkugeln):

$$\begin{aligned} O &= M_{\text{Halbzyl.}} + O_{\text{Halbk.}} \\ &= \frac{1}{2} 2 \cdot 5 \cdot \pi \cdot 10 + \frac{1}{2} 4 \cdot 5^2 \cdot \pi \\ &= 50\pi + 50\pi \qquad = \quad 100\pi \approx 314,16 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich Kosten in Höhe von $6587 \cdot 471,24 = 2069367,098$€ , also etwas mehr als 2 Millionen Euro.

A3. Eine Hantel hat die unten angegebenen Maße. Berechne die Oberfläche und das Gewicht der Hantel, wenn die Dichte des Materials 7,9g/cm^3 beträgt.



Lösung:

Berechnung der Oberfläche: Man kann die Oberfläche einteilen in die Oberfläche eines Zylinders mit 20cm Höhe und einem Radius von 2cm (Der 'Griff' der Hantel mit den beiden über stehenden Enden) und den zwei Oberflächen von zwei Zylindern mit einer Höhe von 2cm und einem Radius von 6cm (Den 'Scheiben' der Hantel), von denen vier Kreise mit jeweils Radius von 2cm subtrahiert werden:

$$\begin{aligned} O &= O_{\text{Griff}} + (O_{\text{Scheibe}} - 4 \cdot O_{\text{Kreis}} \\ &= 2 \cdot 2^2 \cdot \pi + 2 \cdot 2\pi \cdot 20 + 2[2 \cdot 6^2\pi + 2 \cdot 6\pi \cdot 4 - 2 \cdot 2^2\pi] \\ &= 8\pi + 80\pi + 2[72\pi + 48\pi - 8\pi] \\ &= 88\pi + 2 \cdot 112\pi \\ &= 312\pi \\ &\approx 980,18 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Das Volumen besteht aus dem Volumen eines Zylinders mit 2cm Radius und 20cm Höhe (Griff) plus den beiden Zylindern mit 6cm Radius und 2cm Höhe (Scheiben):

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Griff}} + 2 \cdot V_{\text{Scheibe}} \\ &= 2^2\pi \cdot 20 + 2 \cdot 6^2\pi \cdot 4 \\ &= 80\pi + 288\pi \\ &= 368\pi \\ &= 1156,11\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Die Masse beträgt daher: $1156,11 \cdot 7,9 = 9133,24$g, also ca. 9kg.

A4. Die Astronomen nennen bestimmte Sterne 'Weiße Zwerge', andere 'Rote Riesen'. 'Weiße Zwerge' sind verhältnismäßig kleine, aber sehr heiße Sterne (im Vergleich zur Sonne), 'Rote Riesen' sind sehr große, aber kühlere Sterne.
Der Stern "Sirius B" ist ein weißer Stern, der 1862 von dem amerikanischen Astronomen Clark entdeckt wurde. Sein Durchmesser beträgt das 2,2fache des Erddurchmessers. Seine Masse ist so groß wie das der Sonne (330 000 Erdmassen).

a) Die Dichte der Erde beträgt durchschnittlich 5,5g/cm^3. Berechne die Dichte der Sternmaterie.
b) Welche Masse hätte eine Steichholzschachtel (52x36x16mm), wenn sie mit Materie dieses Sterns gefüllt wäre?

Lösung:

a) Zunächst einmal muss berechnet werden, um wieviel größer das Volumen einer Kugel ist, die das 2,2fache des Durchmessers einer anderen (Erd)Kugel hat:

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{3}(2,2r)^3\pi &= \tfrac{4}{3}2,2^3r^3\pi \\ &= 10,648\tfrac{4}{3}r^3\pi \end{aligned}$$

Das Volumen des Sterns ist also 10,648 mal so groß wie das der Erde. Die Masse ist allerdings 330 000 mal so groß. Daraus ergibt sich:

$$5,5 \cdot \frac{330000}{10,648} = 170454,5455$$

Die Masse des Sterns beträgt also: 170454,5455 g/cm^3.

b) Das Volumen einer Streichholzschachtel beträgt:

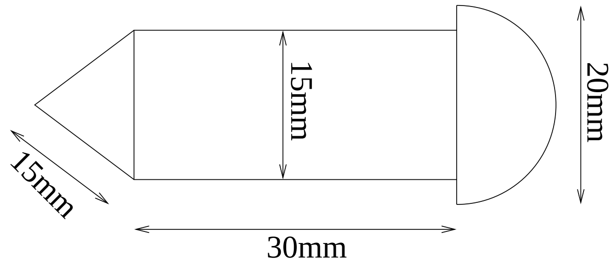
$$5,2 \cdot 3,6 \cdot 1.6 = 29.952 \text{ cm}^3$$

Somit wäre seine Masse:

$$29,952 \cdot 170454.5455 = 5105454.547 \text{ g/cm}^3$$

Die Streichholzschachtel hätte also eine Masse von über fünf Tonnen!

A5. Eine Firma versendet 6000 Stück der abgebildeten Stahlbolzen. Welches Gewicht hat die Sendung, wenn die Dichte 7,9 g/cm^3 ist?



Lösung:
Das Volumen des Körpers (V) besteht aus einer Halbkugel (V_h), einem Zylinder (V_z) und einem Kegel (V_k). Diese können einzeln berechnet werden:

$$\begin{array}{rcl} V_h & = & \frac{4}{3}10^3\pi \cdot \frac{1}{2} \\ V_z & = & 7,5^2\pi \cdot 30 \\ V_k & = & \frac{1}{3}7,5^2\pi \cdot h \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 15^2 & = & h^2 + 7,5^2 \\ 225 & = & h^2 + 56.25 \\ 168.75 & = & h^2 \\ \sqrt{168.75} & = & h \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & = & \frac{1}{3}7,5^2\pi \cdot \sqrt{168,75} \\ V & = & 666,\overline{6}\pi + 1687,5\pi + 243,75\pi \\ & = & 8161,6 \text{ mm}^3 \end{array}$$

Dieses Volumen muss nun zunächst in cm^3 umgerechnet werden:

$$V = 8,1616 \text{ cm}^3$$

und dann mit der Dichte und der Stückzahl multipliziert werden:

$$8,1616 \cdot 7,9 \cdot 6000 = 386859,65 \text{ g}$$

Die Sendung hat also eine Masse von knapp 387 kg.