A1. Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^4 - \frac{37}{4}x^2 + \frac{9}{4}$ b) $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{19}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}$

c) $f(x) = x^5 - 26x^3 + 25x$ d) $f(x) = x^5 + 2x^4 - 13x^3 - 14x^2 + 24x$

Lösung:

a) Durch Substitution erhält man die Gleichung

$$0 = z^2 - \frac{37}{4}z + \frac{9}{4}$$

Diese hat die Lösungen $z = 9$ und $z = \frac{1}{4}$
Die Rücksubstitution ergibt dann die vier Lösungen:

$$x = -3, \quad x = 3, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{2}$$

b) Man errät leicht die erste Nullstelle: $x = 1$. Die Polynomdivision ergibt:

$$x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{19}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} = (x-1)(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 9x - \frac{9}{2})$$

Für den Rest ergeben sich (per Taschenrechner) die Nullstellen:

$$x = -3, \quad x = 3, \quad x = -\frac{1}{2}$$

c) Man sieht leicht, dass man ein x ausklammern kann. Für den Rest ergibt sich per Substitution die Gleichung

$$0 = z^2 - 26z + 25$$

Diese hat die Lösungen $z = 25$ und $z = 1$. Durch Rücksubstitution erhält man die restlichen Nullstellen:

$$x = 0, \quad x = -5, \quad x = 5, \quad x = -1, \quad x = 1$$

d) Hier kann man ebenfalls ein x ausklammern und erhält:

$$0 = x(x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24)$$

Man errät wieder leicht die Nullstelle $x = 1$. Die Polynomdivision ergibt:

$$(x-1)(x^3 + 3x^2 - 10x - 24$$

Hier lassen sich die Nullstellen wieder mit dem Taschenrechner bestimmen, und dann sind alle Nullstellen:

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = -2, \quad x = 3, \quad x = -4$$

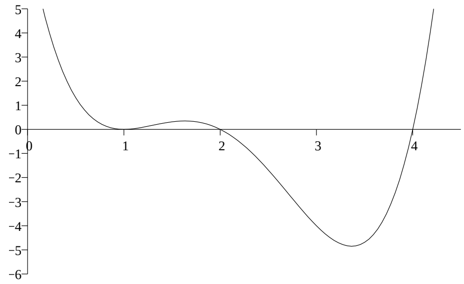
A2. Zerlege die Funktion

$$f(x) = (x-1)(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$$

vollständig in Linearfaktoren und fertige dann damit eine Bereichsuntersuchung an.
Lösung:
Der Rest hat die Nullstellen $x = 1, x = 2$ und $x = 4$. Die Zerlegung lautet daher:

$$f(x) = (x-1)(x-1)(x-2)(x-4)$$

Die Bereichsuntersuchung ergibt:



A3. Welche Aussagen lassen sich zur Symmetrie der Graphen der folgenden Funktionen machen?

a)	$f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x$	b)	$f(x) = x^{10} - 13x^6 + 7x^2 - \sqrt[3]{17}$
c)	$f(x) = x^5 - 13x^3 + 17x - 2$	d)	$f(x) = x^{27} - 27x^{13} + 1000x^7 - 3x$

Lösung:

a) Keine Symmetrie erkennbar
b) Achsensymmetrisch zur y-Achse
c) Keine Symmetrie erkennbar
d) Punktsymmetrisch zum Ursprung

A4. Untersuche die folgenden Funktionen auf ihr Verhalten im Unendlichen. Gib in jedem Fall: $\lim\limits_{x\to\infty}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}$ an.

a)	$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3$	b)	$f(x) = -3x^3 + 4x^2 - 7x + 13$
c)	$f(x) = -x^6 + 13x^3 - 2x$	d)	$f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$

Lösung:

a) $\lim\limits_{x\leftarrow\infty} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x\leftarrow-\infty} f(x) = \infty$
b) $\lim\limits_{x\leftarrow\infty} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\leftarrow-\infty} f(x) = \infty$
c) $\lim\limits_{x\leftarrow\infty} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\leftarrow-\infty} f(x) = -\infty$
d) $\lim\limits_{x\leftarrow\infty} f(x) = 2 \quad \lim\limits_{x\leftarrow-\infty} f(x) = 2$

A5. Bringe bei dieser Aufgabe das Ergebnis immer in die Form: $g(x) = \ldots$

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Wie lautet die Gleichung der Funktion $g(x)$, deren Graph gegenüber $f(x)$ um 5 Einheiten nach oben verschoben wurde?
b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2$. Wie lautet die Gleichung der Funktion $g(x)$, deren Graph aus dem von $f(x)$ entstanden ist, gegenüber diesem aber auf den Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung gestaucht wurde.
c) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 3x$. Der Graph dieser Funktion soll um 2 nach rechts geschoben werden und dann um den Faktor 2 in y-Richtung gestreckt werden. Es ergibt sich damit dann die Funktion $g(x)$. Wie lautet ihre Gleichung?

Lösung:

a) $g(x) = x^2 - 3x + 10$
b) $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2$
c) $g(x) = 2(x-2)^2 - 6(x-2) = 2x^2 - 14x + 20$

A6. Die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ hat die Nullstellen $x = 0$, $x = 1$ und $x = 2$. Beschreibe die Transformation(en), die nötig sind, damit eine Funktion entsteht, welche die Nullstellen $x = 2$, $x = 4$ und $x = 6$ hat.

Lösung:

Der Graph muss zunächst um eine Einheit nach rechts geschoben werden und dann in x-Richtung um den Faktor 2 gestreckt werden.

A1. Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen

a) $f(x) = x^4 - \frac{442}{9}x^2 + \frac{49}{9}$ b) $f(x) = x^4 + \frac{40}{3}x^3 + \frac{118}{3}x^2 - \frac{112}{3}x - \frac{49}{3}$

c) $f(x) = x^5 - 149x^3 + 4900x$

Lösung:

a) DurchSubstitution erhält man die Gleichung:

$$0 = z^2 - \frac{442}{9}z + \frac{49}{9}$$

Diese hat (Taschenrechner) die Lösungen: $z = 49$ und $z = \frac{1}{9}$.
Nach der Rücksubstitution erhält man dann die Lösungen der ursprünglichen Funktion:

$$x = -7, \quad x = 7, \quad x = -\frac{1}{3}, \quad x = \frac{1}{3}$$

b) Hier kann man schnell die erste Nullstelle $x = 1$ raten. Die Polynomdivision ergibt dann den Rest:

$$0 = x^3 + \frac{43}{3}x^2 + \frac{161}{3}x + \frac{49}{3}$$

Diesen kann man mit dem Taschenrechner lösen und rehält damit alle Nullstellen:

$$x = 1, \quad x = -7, \quad (x = -7), \quad x = \frac{1}{3}$$

c) Man sieht sofort, dass man ein x ausklammern kann. Für den Rest ergibt sich durch Substitution:

$$0 = z^2 - 149z + 4900$$

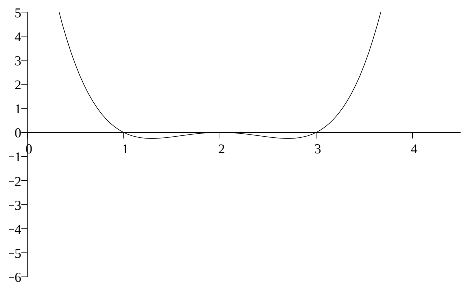
Mit den Lösungen $z = 100$ und $z = 49$. Damit ergeben sich alle Nullstellen:

$$x = 0, \quad x = -10, \quad x = 10, \quad x = -7, \quad x = 7$$

A2. Zerlege die Funktion

$$f(x) = (x - 1)(x^3 - 7x^2 + 16x - 12)$$

vollständig in Linearfaktoren und fertige dann eine Bereichsuntersuchung an.
Lösung:
Für den Rest ergibt der Taschenrechner die Lösungen $x = 2, x = 2$ und $x = 3$. Damit ergibt sich dann die folgende Bereichsuntersuchung:



A3. Welche Aussagen lassen sich zur Symmetrie der folgenden Funktionen machen?

a) $f(x) = x^{12} - 13x^8 + \sqrt{7}$ b) $f(x) = 13x^7 - 2x^5 + 13x^3 - x$

c) $f(x) = x^8 + x$ d) $f(x) = x^{13} - 254x^{11} + 12x^5 - 33x^3 + 1$

Lösung:

a) Achsensymmetrisch zur y-Achse

b) Punktsymmetrisch zum Ursprung

c) Keine Symmetrie erkennbar

d) Keine Symmetrie erkennbar

A4. Welche Aussagen kann man zum Verhalten der folgenden Funktionen machen? (Gib jeweils $\lim\limits_{x\to\infty}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}$ an).

$$\text{a)} \quad f(x) = x^8 - 2x + 3 \qquad \text{b)} \quad f(x) = -3x^7 + 2x^2$$

Lösung:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} = \infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} = \infty$

A5. Gib die Ergebnisse der folgenden Teilaufgaben in der Form $g(x) = \ldots$ an.

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 3$. Wie lautet die Gleichung der Funktion $g(x)$, deren Graph gegenüber dem von $f(x)$ um eine Einheit nach unten verschoben ist?

b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$. Wie lautet die Gleichung der Funktion $g(x)$, deren Graph gegenüber dem von $f(x)$ um den Faktor 2 in y-Richtnug gestaucht wurde?

Lösung:

a) $g(x) = x^2 - 4$

b) $g(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x - 2$

A6. Vereinfache die folgenden Terme soweit wie möglich

$$\text{a)} \quad \frac{x^4y^{-3}z^7}{x^{-2}y^4z^3} \qquad \text{b)} \quad \left(\frac{a^3b^3}{a^{-2}b^6}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{4}}}\right)^6$$

Lösung:

a) $x^6y^{-7}z^4$

b) $\dfrac{a^6b^6a^2b^3}{a^{-4}b^{12}ab^{\frac{3}{2}}} = a^{11}b^{-4.5}$