A1. Vereinfache die folgenden Terme soweit wie möglich. Das Ergebnis sollte keinen Bruch mehr enthalten!

a) $\left(\frac{a^6b^{-3}}{b^2a^{-4}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^7b^4}{a^{-3}b^2}\right)^{-3}$ b) $\left(\frac{xy^3z^{-3}}{x^2y^{-3}z^6}\right)^2 \div \left(\frac{x^3y^{-2}z^5}{x^{-3}y^2z^7}\right)^3$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^6b^{-3}}{b^2a^{-4}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^7b^4}{a^{-3}b^2}\right)^{-3} &= (a^{10}b^{-5})^2 \cdot (a^{10}b^2)^{-3} \\ &= a^{20}b^{-10}a^{-30}b^{-6} \\ &= a^{-10}b^{-16}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\left(\frac{xy^3z^{-3}}{x^2y^{-3}z^6}\right)^2 \div \left(\frac{x^3y^{-2}z^5}{x^{-3}y^2z^7}\right)^3 &= (x^{-1}y^6z^{-9})^2 \div (x^6y^{-4}z^{-2})^3 \\ &= (x^{-2}y^{12}z^{-18}) \div (x^{18}y^{-12}z^{-6}) \\ &= x^{-20}y^{24}z^{-12}\end{aligned}$$

A2. Eine Menge eines radioaktiven Stoffes besteht aus $2.32 \cdot 10^6$ Atomen. Eine Woche später sind es noch $2.30 \cdot 10^6$ Atome. Bestimme eine Gleichung, welche den Verlauf der weiteren Abnahme der Radioaktivität beschreibt und die Halbwertzeit, wenn du davon ausgehen kannst, dass es sich um eine exponentielle Abnahme handelt. (Halbwertzeit ist die Zeit, die es benötigt, bis sich die Menge der radioaktiven Atome halbiert hat.)
Lösung:
Um den Wachstumsfaktor bestimmen zu können muss der Quotient der beiden Werte gebildet werden. Dieser ist:

$$\frac{2.30 \cdot 10^6}{2.32 \cdot 10^6} = \frac{115}{116}$$

Die Gleichung, welche die Abnahme beschreibt ist daher

$$f(x) = 2.32 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{115}{116}\right)^x$$

Um die Halbwertzeit zu ermitteln, muss die folgende Gleichung gelöst werden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \left(\frac{115}{116}\right)^x \\ \log(\frac{1}{2}) &= x \cdot \log(\frac{115}{116}) \\ \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(\frac{115}{116})} &= x \\ 80.06 &\approx x\end{aligned}$$

Die Halbwertzeit beträgt etwas mehr als 80 Wochen.

A3. Auf einem Teich schwimmt eine Seerose. Am nächsten Tag sind es zwei Seerosen und am Tag danach sind es vier. Die Anzahl der Seerosen verdoppelt sich jeden Tag. Am 62ten Tag ist der Teich mit Seerosen bedeckt. An welchem Tag war der Teich zur Hälfte bedeckt?
Lösung:
Am 61ten Tag.

A4. Löse die folgenden Gleichungen (Der Lösungsweg muss erkennbar sein)

a)	$x + 3 = 3^{1.5}$	b)	$13 = 2 \cdot x^3$
c)	$15 = 3 \cdot 2^x$	d)	$2^x = 3 \cdot 3^x$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} x + 3 &= 3^{1.5} \\ x &= 3^{1.5} - 3 \\ x &\approx 23.20 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 13 &= 2 \cdot x^3 \\ 6.5 &= x^3 \\ \sqrt[3]{6.5} &= x \\ 1.87 &\approx x \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 15 &= 3 \cdot 2^x \\ 5 &= 2^x \\ \log_2(5) &= x \\ 2.32 &\approx x \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 2^x &= 3 \cdot 3^x \\ \frac{2^x}{3^x} &= 3 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= 3 \\ x &= \log_{\frac{2}{3}}(3) \\ x &\approx -2.71 \end{aligned}$$

A5. Bestimme mit der h-Methode jeweils die Ableitung der angegebenen Funktion an der jeweils angegebenen Stelle.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2, \quad x_0 = -3$ a) $f(x) = \frac{1}{2+x}, \quad x_0 = 2$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(h-3) - f(-3)}{h} \\ &= \frac{(h-3)^2 - 3(h-3) + 2 - [(-3)^2 - 3(-3) + 2]}{h} \\ &= \frac{h^2 - 6h + 9 - 3h + 9 + 2 - [9 + 9 + 2]}{h} \\ &= \frac{h^2 - 9h}{h} \\ &= \frac{h(h-9)}{h} \\ &= h - 9 \end{aligned}$$

Somit ist die Ableitung:

$$f'(-3) = \lim_{h \to 0}(h - 9) = 9$$

b)

$$\begin{aligned}
m &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\
&= \frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\
&= \frac{\frac{1}{2+2+h}-\frac{1}{2+2}}{h}\\
&= \frac{\frac{1}{4+h}-\frac{1}{4}}{h}\\
&= \frac{\frac{4}{4(4+h)}-\frac{4+h}{4(4+h)}}{h}\\
&= \frac{-h}{h\cdot 4(4+h)}\\
&= \frac{-1}{16+4h}
\end{aligned}$$

Somit ist die Ableitung:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{16+4h}\right) = -\frac{1}{16}$$

A6. **Knobelaufgabe**[1] Bestimme zu der Funktion: $f(x) = x^2$ die Ableitungen: $f'(2), f'(4), f'(5), f'(10)$ und $f'(-2)$ mit der h-Methode!
Lösung:
Da die h-Methode mehrfach mit verschiedenen Zahlen durchgeführt werden soll, könnte man ja vielleicht mal eine Variable statt der Zahlen verwenden. Schaun mer mal!

$$\begin{aligned}
m &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\
&= \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}\\
&= \frac{2hx+h^2}{h}\\
&= 2x+h
\end{aligned}$$

Nun schaun wir mal, was passiert, wenn wir den Limes anwenden:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

Wenn man nun nacheinander die Zahlen für x einsetzt, dann ergibt sich:

$$f'(2) = 4, \quad f'(4) = 8, \quad f'(5) = 10, \quad f'(10) = 20, \quad f'(-2) = -4$$

Jetzt hoffen wir mal, dass die Ideen Gnade vor den Augen vom Cremer finden.

[1] Diese Aufgabe gibt nur irre wenig Punkte — Wenn du nicht weißt was du tust: Lass es!

A1. Vereinfache die folgenden Terme so, dass sie keinen Bruch mehr enthalten.

a) $\left(\frac{a^4b^3}{a^{-2}b^2}\right)^{-3} \div \left(\frac{a^{-2}b^6}{a^3b^{-7}}\right)^4$ b) $\left(\frac{x^6y^3z^{-3}}{x^{-3}y^2z^{-7}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{x^{-2}y^3z}{x^3y^{-3}z^{-3}}\right)^5$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^4b^3}{a^{-2}b^2}\right)^{-3} \div \left(\frac{a^{-2}b^6}{a^3b^{-7}}\right)^4 &= \left(a^6b\right)^{-3} \div \left(a^{-5}b^{13}\right)^4\\ &= a^{-18}b^{-3} \div a^{-20}b^{52}\\ &= a^2b^{-55}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^6y^3z^{-3}}{x^{-3}y^2z^{-7}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{x^{-2}y^3z}{x^3y^{-3}z^{-3}}\right)^5 &= \left(x^9yz^4\right)^{-3} \cdot \left(x^{-5}y^6z^4\right)^5\\ &= x^{-27}y^{-3}z^{-12}x^{-25}y^30z^20\\ &= x^{-52}y^{27}z^8\end{aligned}$$

A2. In einem Nährmedium wird eine Bakterienkultur angelegt. Zu Beginn sind es $3.4 \cdot 10^6$ Bakterien. Nach einer Stunde werden sie wieder gezählt und nun sind es $4.1 \cdot 10^6$.
Erstelle, unter der Annahme, dass es sich um ein exponentielles Wachstum handelt, eine Funktionsgleichung, mit der du die Zunahme der Bakterien berechnen kannst. Gib darüber hinaus an, nach welcher Zeit sich die Bakterien verdoppelt haben werden.
Lösung:
Der Wachstumsfaktor wird berechnet zu:

$$\frac{4.1 \cdot 10^6}{3.4 \cdot 10^6} = \frac{41}{34} \approx 1.21$$

Die Gleichung für den Wachstum lautet demnach:

$$f(x) = 3.4 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{41}{34}\right)^x$$

Um die Verdopplungszeit zu bestimmen muss man die folgende Gleichung lösen:

$$\begin{aligned}2 &= \left(\frac{41}{34}\right)^x\\ \lg(2) &= x \cdot \lg(\frac{41}{34}\\ \frac{\lg(2)}{\lg(\frac{41}{34}} &= x\\ 3.70 &\approx x\end{aligned}$$

Die Bakterien verdoppeln sich alle 3.7 Stunden.

A3. Die folgende Wertetabelle gibt ein Wachstum an. Gib eine begründete Vermutung darüber ab, ob es sich um ein exponentielles oder lineares Wachtum handelt und stelle die zugehörige Gleichung auf.

x	0	1	2	3	5
$f(x)$	12.00	14.38	17.26	20.73	29.86