EF m_9 1.Klausur 9.12.2013

A1. Berechne von den folgenden Funktionen die Nullstellen; der Rechenweg muss erkennbar sein!

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ b) $f(x) = x^3 - 13x + 12$

c) $f(x) = x^4 - \frac{65}{4}x^2 + 4$ d) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12)(x - 5)$

Lösung:

a) Eine geratene Nullstelle ist $x = 1$. Mit der Polynomdivision ergibt sich:

$$f(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$

und dann, z.B. mit pq-Formel:

$$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$$

Die Nullstellen sind daher: $x = 1$, $x = 3$ und $x = -2$.

b) Eine geratene Nullstelle ist $x = 1$. Mit einer Polynomdivision ergibt sich:

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + x - 12)$$

mit der pq-Formel ergibt sich weiter:

$$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 4)$$

Die Nullstellen sind daher $x = 1$, $x = 3$ und $x = -4$.

c) Hier ergibt die Substitution:

$$f(z) = z^2 - \frac{65}{4}z + 4$$
$$(z - 16)(z - \frac{1}{4})$$

Nach Rücksubstitution ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 16)(x^2 - \frac{1}{4}) \\ &= (x - 4)(x + 4)(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind dann $x = 4$, $x = -4$, $x = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{1}{2}$.

d) Hier müssen eigentlich nur die beiden quadratischen Terme zweiter zerlegt werden, es ist:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

und

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

damit ist:

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$$

und die Nullstellen: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ und $x = 5$.

A2. Bestimme für die Funktionen aus A1 b) und A1 d) jeweils den y-Achsenabschnitt

Lösung:

a) Hier kann der yAA sofort abgelesen werden: yAA= 12.

b) Der yAA ergibt sich durch die Multiplikation der Absolutglieder:

$$y\text{AA} = 2 \cdot 12 \cdot (-5) = -120$$

A3. Zerlege die Funktion

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$$

in Linearfaktoren und führe eine Bereichsuntersuchung durch (Berechnungen müssen erkennbar sein; nicht nur einfach Angabe: Mit TR)

Lösung:

Als erste Nullstelle lässt sich leicht $x = 1$ raten. Mit einer Polynomdivision ergibt sich dann:

$$f(x) = (x-1)(x^3 - 4x^2 + x + 6)$$

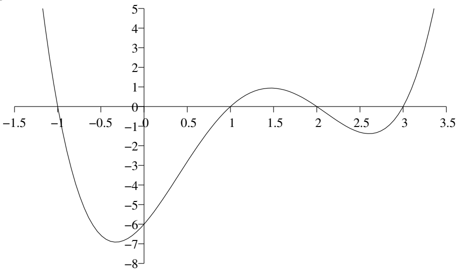
Für den x^3-Rest können mit dem TR die weiteren Nullstellen gefunden werden, wählt man als weitere Nullstelle $x = -1$, dann ergibt eine weitere Polynomdivision:

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - 5x + 6)$$

Dies lässt sich dann weiter zerlegen zu

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$$

Die Bereichsuntersuchung ergibt dann:



A4. Bestimme für die folgenden Funktionen jeweils das Verhalten im Unendlichen.

a)	$f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 7x + 3$	b)	$f(x) = 13x^{2334} - 12x^{564} + 13x - 2$
c)	$f(x) = -3x^4 + 2x^3 - x^5 + 2x^2 - 3x + 7$	d)	$f(x) = (x-1)(x-1)(x+2)(x+3)$

Lösung:

a)	$x \longrightarrow \infty : f(x) \longrightarrow -\infty$ $x \longrightarrow -\infty : f(x) \longrightarrow \infty$	b)	$x \longrightarrow \infty : f(x) \longrightarrow \infty$ $x \longrightarrow -\infty : f(x) \longrightarrow \infty$
c)	$x \longrightarrow \infty : f(x) \longrightarrow -\infty$ $x \longrightarrow -\infty : f(x) \longrightarrow \infty$	d)	$x \longrightarrow \infty : f(x) \longrightarrow \infty$ $x \longrightarrow -\infty : f(x) \longrightarrow \infty$

A5. Gib an, welche Aussagen du hinsichtlich der Symmetrie der Funktionsgraphen der folgenden Funktionen machen kannst.

a)	$f(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 1$	b)	$f(x) = x^7 - 3x^5 + 2x + 3$
c)	$f(x) = x^4 + 3x^2 - x$	d)	$f(x) = x^7 - 3x^5 - x$

Lösung:

a)	Achsensymmetrisch zur y-Achse
b)	Keine Symmentrie erkennbar
c)	Keine Symmentrie erkennbar
d)	Punktsymmetrisch zum Ursprung

A6. **Knobelaufgabe** Angenommen für eine Funktion gilt: $x \longrightarrow \infty : f(x) \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty : f(x) \longrightarrow \infty$. Welche Art von Symmetrie kann der Funktionsgraph dann **nicht** haben?
Lösung:
Er kann nicht punktsymmetrisch zum Ursprung sein.

A1. Berechne von den folgenden Funktionen die Nullstellen; der Rechenweg muss erkennbar sein!

a) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$ b) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

c) $f(x) = x^4 - \frac{226}{9}x^2 + \frac{25}{9}$ d) $f(x) = (x^2 + 2x - 3)(x - 3)(x^2 - 4x - 5)$

Lösung:

a) Man rät leicht die erste Nullstelle $x = 2$. Die Polynomdivision ergibt dann:

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 10x + 24)$$

Z.B. mir pq-Formel erhÏt man die weiteren Nullstellen $x = 4$ und $x = 6$

b) Auch hier kann die erste Nullstelle $x = 1$ leicht geraten werden. Die Polynomdivision ergibt:

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$$

Und solmit ergeben sich keine weiteren Nullstellen.

c) Durch Substitution bekommt man:

$$f(z) = z^2 - \frac{226}{9}z + \frac{25}{9}$$

Das ergibt die Lösungen $z = 25$ und $z = \frac{1}{9}$ und damit die endgültigen Lösungen $x = -5$, $x = 5$, $x = -\frac{1}{3}$ und $x = \frac{1}{3}$.

d) Der erste Faktor lässt sich zu $(x + 3)(x - 1)$ zerlegen und der dritte zu $(x - 5)(x + 1)$. Damit ergeben sich die Nullstellen $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ und $x = 5$.

A2. Bestimme für die Funktionen der Aufgaben A1b) und A1d) jeweils den y-Achsen-Abschnitt.

Lösung:

a) yAA$= -1$

b) yAA$= -45$

A3. Zerlege die Funktion

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12$$

in Linearfaktoren und führe eine Bereichsuntersuchung durch (Berechnungen müssen erkennbar sein; nicht nur einfach Angabe: Mit TR)

Lösung:

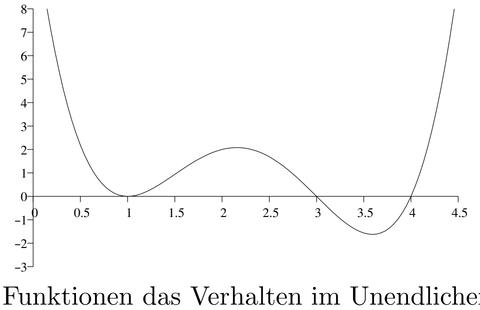
Als erste Nullstelle findet man schnell $x = 1$. Eine folgende Polynomdivision ergibt:

$$f(x) = (x - 1)(x^3 - 8x^2 + 19x - 12)$$

Auch bei dem Rest ergibt sich die Nullstelle $x = 1$ und nach einer weiteren Polynomdivision:

$$f(x) = (x - 1)(x - 1)(x^2 - 7x + 12$$

Der quadratische Rest hat die Linearfaktoren $(x - 3)(x - 4)$. Damit kann dann die Bereichsuntersuchung durchgeführt werden.



A4. Bestimme für die folgenden Funktionen das Verhalten im Unendlichen.

a) $f(x) = -2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 1$ b) $f(x) = 13x^{13} - 12x^{12}$

c) $f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 10)(x - 22)$ d) $f(x) = \frac{2x - 3}{2x + 3}$

Lösung:

a)	$x \longrightarrow \infty : f(x) \longrightarrow -\infty$ $x \longrightarrow -\infty : f(x) \longrightarrow -\infty$	b)	$x \longrightarrow \infty : f(x) \longrightarrow \infty$ $x \longrightarrow -\infty : f(x) \longrightarrow -\infty$
c)	$x \longrightarrow \infty : f(x) \longrightarrow \infty$ $x \longrightarrow -\infty : f(x) \longrightarrow \infty$	d)	$x \longrightarrow \infty : f(x) \longrightarrow 1$ $x \longrightarrow -\infty : f(x) \longrightarrow 1$

A5. Welche Aussagen können bezüglich der Graphen der folgenden Funktionen gemacht werden?

a)	$f(x) = x^8 - 3x^6 + 17x^2 - 9$	b)	$f(x) = x^{713} - 713x^{123} + 5x$
c)	$f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 7x + 3$	d)	$f(x) = x^{13} + 5x^{11} - 7x^5 + 2x^3 - 4$

Lösung:

a) Achsensymmetrisch zur y-Achse

b) Punktsymmetrisch zum Ursprung

c) Keine Symmetrie erkennbar

d) Keine Symmetrie erkennbar

A6. **Knobelaufgabe** für eine Funktion gilt: $x \longrightarrow \infty : f(x) \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty : f(x) \longrightarrow -infty$.
Welche Art von Symmetrie kann bei der Funktion **nicht** vorliegen?
Lösung:
Die Funktion kann nicht achsensymmetrisch zur y-Achse sein.