EF m_9 1.Klausur 17.3.2014

A1. Vereinfache!

a)	$\log_3(27)$	b)	$\log_{12}(144)$	c)	$\log_{0.5}(0.25)$
d)	$\log_a(a^3)$	e)	$\log_{a^2}(a^6)$	f)	$a^{\log_a(117)}$

Lösung:

a)	3	b)	2	c)	2
d)	3	e)	3	f)	117

A2. Löse die folgenden Gleichungen

a)	$5^x = 2$	b)	$7^{x+1} = 13$
c)	$200 \cdot 1.7^x = 150 \cdot 1.8^x$	d)	$2^{x+1} = 3^{x-1}$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} 5^x &= 2 \\ x \cdot \ln(5) &= \ln(2) \\ x &= \frac{\ln(2)}{\ln(5)} \approx 0.43 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 7^{x+1} &= 13 \\ (x+1)\ln(7) &= \ln(13) \\ x \cdot \ln(7) + \ln(7) &= \ln(13) \\ x &= \frac{\ln(13) - \ln(7)}{\ln(7)} \approx 0.32 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 200 \cdot 1.7^x &= 150 \cdot 1.8^x \\ \ln(200) + x\ln(1.7) &= \ln(150) + x\ln(1.8) \\ x\ln(1.7) - x\ln(1.8) &= \ln(150) - \ln(200) \\ x &= \frac{\ln(150) - \ln(200)}{\ln(1.7) - \ln(1,8)} \approx 5.03 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 2^{x+1} &= 3^{x-1} \\ (x+1)\ln(2) &= (x-1)\ln(3) \\ x\ln(2) + \ln(2) &= x\ln(3) - \ln(3) \\ x\ln(2) - x\ln(3) &= -\ln(2) - \ln(3) \\ x &= \frac{-\ln(2) - \ln(3)}{\ln(2) - \ln(3)} \approx 4.42 \end{aligned}$$

A3. Ein Teich wächst entsprechend einer exponentiellen Funktion mit Seerosen zu. Am 3. Tag sind ein Zehntel des Teichs mit Seerosen bewachsen, am 7. Tag sind es drei Fünftel.

a) Beschreibe das Wachstum durch die Funktionsgleichung einer exponentiellen Funktion.

b) An welchem Tag sind 12.5% des Teiches mit Seerosen bewachsen?

Lösung:

a) Es ist:

$$\frac{1}{10} = c \cdot a^3$$
$$\frac{3}{5} = c \cdot a^7$$

$$\frac{1}{10a^3} = c$$
$$\frac{3}{5} = \frac{1}{10a^3} \cdot a^7$$

$$\frac{1}{10a^3} = c$$
$$6 = a^4$$

$$c \approx 0.03$$
$$a \approx 1.57$$

Die Funktionsgleichung lautet daher: $f(x) = 0.03 \cdot 1.57^x$

b) Hier ist die Gleichung zu lösen:

$$\frac{1}{8} = 0.03 \cdot 1.57^x$$
$$\frac{\ln(\frac{1}{8 \cdot 0.03})}{\ln(1.57)} = x$$
$$3.5 \approx x$$

Nach ca. 3,5 Tagen ist der Teich zu einem Achtel bewachsen.

A4. Bestimme mit der h-Methode die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ an der Stelle $x = 1$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^3 + (1+h)^2 + 1 + h + 1 - 4}{h} \\ &= \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 + 1 + 2h + h^2 + 1 + h - 4}{h} \\ &= \frac{6h + 4h^2 + h^3}{h} \\ &= \frac{h(6 + 4h + h^2)}{h} \\ &= 6 + 4h + h^2\end{aligned}$$

Weiter ist

$$h \longrightarrow 0 : 6 + 4h + h^2 \longrightarrow 6$$

Daher gilt: $f'(1) = 6$.

A5. Bestimme mit der h-Methode die Ableitungsfunktion von $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{x^2+2hx+h^2} - \frac{1}{x^2}}{h} \\ &= \frac{x^2 - x^2 - 2hx - h^2}{h(x^4 + 2hx^3 + h^2x^2} \\ &= \frac{-2x - h}{x^4 + 2hx^3 + h^2x^2}\end{aligned}$$

Weiter ist:

$$h \longrightarrow 0 : \frac{-2x - h}{x^4 + 2hx^3 + h^2x^2} \longrightarrow \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

.

Daher gilt: $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$.

A6. Bestimme die Ableitungsfunktion von $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 9$. Gib dabei bei jedem Schritt die verwendete Ableitungsregel an.
Lösung:

$$\begin{array}{rcll} f'(x) & = & [2x^3 - 5x^2 + 7x + 9]' & |\text{S.R.} \\ & = & [2x^3]' - [5x^2]' + [7x^1]' + [9x^0]'] & |\text{F.R.} \\ & = & 2[x^3]' - 5[x^2]' + 7[x^1]' + 9[x^0]'] & |\text{P.R.} \\ & = & 6x^2 - 10x + 7[+0] & \end{array}$$

A7. Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle gibt anschaulich die Steigung dieser Funktion an dieser Stelle an. Man kann auch sagen, dass damit die Änderung der Funktionswerte an dieser Stelle angegeben wird (Steigen die Funktionswerte, oder sinken sie). Leitet man eine Ableitungsfunktion nochmals ab, erhält man die sogenannte zweite Ableitung. Sie gibt die Steigung der Steigung an, oder die Änderung der Steigung der ursprünglichen Funktion. Welche anschauliche Beschreibung ergibt sich daher für diese zweite Ableitung?
Lösung:
Sie gibt die Krümmung an.

EF m_6 3.Klausur 26.3.2014

A1. Löse die folgenden Gleichungen:

a)	$3^x = 7$	b)	$2^{x-1} = 10$
c)	$5 \cdot 2^x = 3 \cdot 3^x$	d)	$2^{x^2-2} = 4$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} 3^x &= 7 \\ x\ln(3) &= \ln(7) \\ x &= \tfrac{\ln(7)}{\ln(3)} \approx 1.77 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2^{x-1} &= 10 \\ (x-1)\ln(2) &= \ln(10) \\ x\ln(2)-\ln(2) &= \ln(10) \\ x\ln(2) &= \ln(10)+\ln(2) \\ x &= \tfrac{\ln(10)+\ln(2)}{\ln(2)} \approx 4.32 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 5\cdot 2^x &= 3\cdot 3^x \\ \tfrac{5}{3} &= \left(\tfrac{3}{2}\right)^x \\ \ln(\tfrac{5}{3}) &= x\ln(\tfrac{3}{2}) \\ \tfrac{\ln(\frac{5}{3})}{\ln(\frac{3}{2})} &= x \approx 1.26 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2^{x^2-2} &= 4 \\ 2^{x^2-2} &= 2^2 \\ x^2-2 &= 2 \\ x^2-4 &= 0 \\ x=2 &\vee x=-2 \end{aligned}$$

A2. Von 34g eines radioaktiven Materials sind nach 7 Tagen noch 33g vorhanden und nach 10 Tagen noch 31g.

a) Beschreibe den radioaktiven Verfall mit der Gleichung einer Exponentialfunktion.

b) Bestimme die Halbwertzeit des radioaktiven Materials, also die Zeit, nach der die Hälfte des Materials nicht mehr vorhanden ist. (Zur Kontrolle: Für den Anfangswert c kann 38.18g verwendet werden!)

Lösung:

a) Für die Funktion gilt:

$$33 = c\cdot a^7$$
$$31 = c\cdot a^{10}$$

$$c = \frac{33}{a^7}$$
$$31 = \frac{33}{a^7}\cdot a^{10}$$
$$\frac{31}{33} = a^3$$
$$\sqrt[3]{\frac{31}{33}} = a \approx 0.98$$
$$c = \frac{33}{\sqrt[3]{\frac{31}{33}}^7} \approx 38.18$$

Die Funktionsgleichung lautet daher

$$f(x) = 38.18\cdot 0.98^x$$

b) Für diese Aufgabe ist die folgende Gleichung zu lösen:

$$0.5 = 0.98^x$$
$$\ln(0.5) = x\ln(0.98)$$
$$x = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.98)} \approx 34.31$$

Nach $34\frac{1}{3}$ Tagen ist die Halbwertzeit erreicht.

A3. Bestimme mit der h-Methode die Ableitungsfunktion zu

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1}}{h} \\
&= \frac{\frac{x+1}{(x+h+1)(x+1)} - \frac{x+h+1}{(x+h+1)(x+1)}}{h} \\
&= \frac{\frac{-h}{(x+h+1)(x+1)}}{h} \\
&= \frac{-1}{(x+h+1)(x+1)}
\end{aligned}$$

Weiter ist:

$$h \longrightarrow 0: \frac{-1}{(x+h+1)(x+1)} \longrightarrow \frac{-1}{(x+1)^2} = f'(x)$$

A4. Bestimme die Ableitungsfunktion der Funktion

$$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7$$

und gib dabei Schritt für Schritt die Ableitungsregeln an, die du verwendest.

Lösung:

$$\begin{array}{rcll}
f'(x) &=& [3x^3 + 4x^2 - 5x^1 + 7x^0]' & \text{S.R.} \\
&=& [3x^3]' + [4x^2]' - [5x^1]' + [7x^0]' & \text{F.R.} \\
&=& 3[x^3]' + 4[x^2]' - 5[x^1]' + 7[x^0]' & \text{P.R.} \\
&=& 3 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x - 5 \cdot 1 & \\
&=& 9x^2 + 8x - 5 &
\end{array}$$

A5. Bestimme die Ableitungsfunktionen zu:

$$\begin{array}{llll}
\text{a)} & f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 7 & \text{b)} & f(x) = (x^2-1)(x^2+1) \\
\text{c)} & f(x) = x + \dfrac{1}{x} & \text{d)} & f(x) = \sqrt[3]{x^4} - \sqrt[5]{x^3}
\end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & f'(x) = 8x^3 - 12x \\
\text{b)} & f(x) = x^4 - 1 \\
\Leftrightarrow & f'(x) = 4x^3 \\
\text{c)} & f(x) = x + x^{-1} \\
\Leftrightarrow & f'(x) = 1 - x^{-2} \\
\text{d)} & f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{3}{5}} \\
\Leftrightarrow & f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}
\end{array}$$

A6. Betrachte die Funktion

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

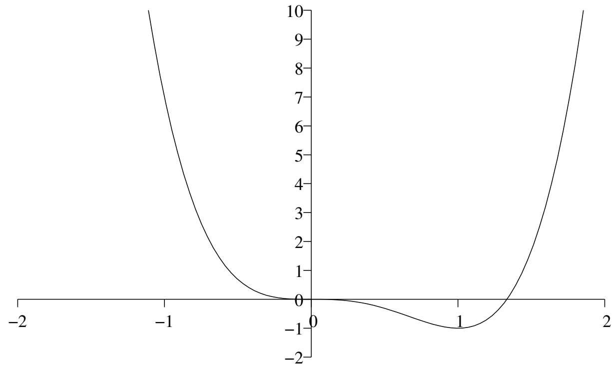
a) Skizziere den Verlauf der Funktion für den Bereich von $x = -1$ bis $x = 2$.

b) Bestimme die Ableitungen der Funktion an den Stellen $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ und $x - 2$.

c) **Knobelaufgabe mit nur einem Punkt!** Welche Bedeutung haben die Ergebnisse aus a) und b) für die Bestimmung von 'Bergspitzen' (Maximum) oder 'Talsohlen' (Minimum) von Funktionsgraphen?

Lösung:

a)



b) Es ist

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

Daraus folgt:

$$f'(-1) = -24$$
$$f'(0) == 0$$
$$f'(1) = -1$$
$$f'(2) = 48$$

c) Es reicht nicht nach Stellen zu suchen, bei denen $f'(x) = 0$ ist.

EF Nachschreibeklausur 30.4..2014

A1. Eine Bakterienkultur hat am 3. Tag 100 000 Bakterien und am 10. Tag 275 000 Bakterien.

a) Bestimme die Gleichung einer Exponentialfunktion, welche das Wachstum der Bakterienkultur beschreibt.

b) Bestimme mit dieser Funktion wieviele Stunden es ungefähr dauert, bis sich die Anzahl der Bakterien verdoppelt hat. Wird die Aufgabe a) nicht gelöst, dann soll statt der Funktion aus a) die Funktion: $f(x) = 64820.83 \cdot 1.16^x$ verwendet werden!

Lösung:

a) Das folgende Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\begin{aligned} 100000 &= c \cdot a^3 \\ 275000 &= c \cdot a^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{100000}{a^3} &= c \\ 2.75 &= a^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 64820.83 &= c \\ 1.16 &= a \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) = 64820.83 \cdot 1.16^x$ i

b) Hier muss die folgende Gleichung gelöst werden:

$$\begin{aligned} 2 &= 1.16^x \\ \frac{\ln(2)}{\ln(1.16)} &= x \\ 4.67 &= x \end{aligned}$$

Da es sich dabei um Tage handelt, gilt weiter:

$$4.67 \cdot 24 = 112.08$$

Es dauert also ca. 112 Stunden, bis sich die Anzahl der Bakterien verdoppelt hat.

A2. Löse die folgenden Gleichungen

a) $2 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x$ b) $4^{2+x} = 2^{4-x}$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^x &= 3 \cdot 2^x \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x &= \frac{3}{2} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 4^{2+x} &= 2^{4-x} \\ 2^{4+2x} &= 2^{4-x} \\ 4 + 2x &= 4 - x \\ 3x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

A3. Bestimme mit der h-Methode die Ableitungsfunktion der Funktion

$$f(x) = (x-1)(x-2) - (x-3)$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2-4(x+h)+5-[x^2-4x+5]}{h}\\
&= \frac{x^2+2hx+h^2-4x-4h+5-x^2+4x-5}{h}\\
&= \frac{2hx+h^2-4h}{h}\\
&= 2x+h-4\\
& h \to 0 : 2x+h-4 \to 2x-4
\end{aligned}
$$

Die Ableitungsfunktion ist

$$f'(x) = 2x-4$$

A4. Besimmt jeweils die erste Ableitungsfunktion

a)	$f(x) = 3x^3+2x^2+x$	b)	$f(x) = (x^2-1)(x^2+1)$
c)	$f(x) = \sqrt[3]{x^5}$	d)	$f(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$

Lösung:

a)	$f'(x) = 9x^2+4x+1$
b)	$f(x) = x^4-1$
	$f'(x) = 4x^3$
c)	$f(x) = x^{\frac{5}{3}}$
	$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$
d)	$f(x) = x^{-1}-x^{-2}$
	$f'(x) = -x^{-2}+2x^{-3}$

A5. Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = x^3-6x^2+9x-3$$

genau ein Minimum und ein Maximum besitzt. Berechne dazu den Hochpunkt und den Tiefpunkt.
Lösung:
Die Ableitungsfunktionen sind:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2-12x+9\\
f''(x) &= 6x-12
\end{aligned}
$$

Die notwendige Bedingung lautet: $f'(x) = 0$; es ist:

$$
\begin{aligned}
2x^2-12x+9 &= 0\\
x &= 1 \vee x-1
\end{aligned}
$$

Die hinreichende Bedingung lautet: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$
\begin{aligned}
f''(1) &= 6-12 = -6 \Rightarrow \text{ Maximum}\\
f''(3) &= 18-12 = 6 \Rightarrow \text{ Minimum}
\end{aligned}
$$

da weiterhin:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 1\\
f(3) &= -3
\end{aligned}
$$

ist: $HP(1/1)$ und $TP(3/-3)$