EF 1.Klausur 29.10.2014

A1. Berechne die folgenden Aufgaben so, dass der Rechenweg erkennbar ist.

a) Eine Gerade geht durch den Punkt $P(1/-3)$ und sie hat die Steigung $\frac{1}{2}$. Welche Gleichung hat die Gerade?

b) Eine Gerade geht durch die Punkte $A(1/-3)$ und $B(-4/3)$. Welche Steigung hat die Gerade?

c) Eine Gerade hat die Gleichung $f(x) = 2x + 3$. Bestimme zwei Punkte, durch die diese Gerade führt.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} -3 &= \frac{1}{2} \cdot 1 + n \\ -\frac{7}{2} &= n \\ f(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} = 0.5x - 3.5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} m &= \frac{3-(-3)}{-4-1} \\ &= \frac{6}{-5} = -1.2 \end{aligned}$$

c) Hier können zwei beliebige x-Werte in die Gleichung eingesetzt werden $\Rightarrow A(0/3) \quad B(1/5)$

A2. In welchem Punkt schneiden sich die Geraden

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{3}x - 1$$

Lösung:

Den x-Wert des Schnittpunkts erhält man, indem man die beiden Gleichungen gleich setzt:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= \frac{1}{3}x - 1 \\ 6x + 9 &= x - 3 \\ 5x &= -12 \\ x &= -\frac{12}{5} = -2.4 \end{aligned}$$

Setzt man diesen x-Wert in eine der beiden Gleichungen ein, erhält man den y-Wert:

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot -\frac{12}{5} + 3 \\ &= -\frac{24}{5} + \frac{15}{5} \\ &= -\frac{9}{5} = -1.8 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt ist daher: $\left(-\frac{12}{5}/-\frac{9}{5}\right) = (-2.4/-1.8)$

A3. Gib alle Aussagen an, die über den Graph der folgenden Funktionen **ohne Berechnung** gemacht werden können.

a)	$f(x) = -3x^2 + 7x + 2$	b)	$f(x) = \frac{17}{18}x^2 - 3x + 3$
c)	$f(x) = 3(x-3)^2 + 5$	d)	$f(x) = -(x-3)(x+8)$

Lösung:

a) Nach unten geöffnet, gestreckt, yAA=2

b) Nach oben geöffnet, gestaucht, yAA=3

c) Nach oben geöffnet, gestreckt, SP(3/5)

d) Nach unten geöffnet, Normalparabel, Nullstellen 3 und -8

A4. Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen (Der Rechenweg muss erkennbar und nachvollziehbar sein).

a)	$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	b)	$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$
c)	$f(x) = x^4 - \frac{37}{4}x^2 + \frac{9}{4}$	d)	$f(x) = (x-3)(x+\sqrt{2})(x-\frac{1}{3})(x+5)$

Lösung:

a) Man kann leicht die erste Nullstelle $x = 1$ erraten. Die Polynomdivision ergibt:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \div (x - 1) = x^2 - x - 6$$

Mittels quadratischer Ergänzung oder p-q-Formel ergeben sich die weiteren Nullstellen: $x = 3$ und $x = -2$.

b) Hier errät man leicht die Nullstelle $x = 2$. Die Polynomdivision ergibt:

$$(x^3 + 2x^2 - 3x - 10) \div (x - 2) = x^2 + 4x + 5$$

Der quadratische Term ist irreduzibel, so dass sich keine weiteren Nullstellen ergeben.

c) Die Substitution $z = x^2$ ergibt:

$$z^2 - \frac{37}{4}z + \frac{9}{4} = (z - 9)(z - \frac{1}{4})$$

Man sieht leicht, dass sich die Nullstellen:

$$x = -3, x = 3, x = \frac{1}{2} \text{ und } x = -\frac{1}{2}$$

ergeben.

d) Hier können die Nullstellen direkt abgelesen werden:

$$x = 3, x = -\sqrt{2}, x = \frac{1}{3}, \text{ und } x = -5$$

A5. In der Mitte einer rechteckigen Wiese, mit den Abmessungen 10 mal 15 Meter, soll ein rechteckiges Beet so angelegt werden, dass die Kanten des Beetes von den Kanten der Wiese immer gleich weit entfernt sind. Wie groß muss der Abstand von Beetkante zu Wiesenkante gewählt werden, wenn das Beet einen Flächeninhalt von 66m^2 haben soll?

Lösung:

Der gesuchte Abstand soll x genannt werden:

$$\begin{aligned}(15 - 2x)(10 - 2x) &= 66\\ 4x^2 - 50x + 150 &= 66\\ 4x^2 - 50x + 84 &= 0\\ x &= 2 \vee x = 10.5\end{aligned}$$

Da die Angabe von 10.5m offensichtlich unsinnig ist, muss der Abstand immer zwei Meter betragen.

A6. **Knobelaufgabe** Vom Punkt $P(0/-13)$ soll eine Tangente an die Parabel zu der Gleichung: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ gelegt werden (Eine Tangente an einen Funktionsgraphen hat mit diesem nur **einen** Punkt gemeinsam!) Bestimme die möglichen Lösungen für diese Aufgabenstellung.

Lösung:

Der y-Achsen-Abschnitt der Geraden ist -13 und somit ist nur noch die Steigung unbekannt. Diese muss so gewählt werden, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ nur eine Lösung hat:

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= mx - 13\\ x^2 - (4 + m)x + 16 &= 0\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass (Diskriminante muss Null sein):

$$\begin{aligned}\frac{4 + m)^2}{4} &= 16\\ 16 + 8m + m^2 &= 64\\ m^2 + 8m - 48 &= 0\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $m = -12$ und $m = 4$. Somit sind die beiden Gleichungen $g_1(x) = 4x - 13$ und $g_2(x) = -12x - 13$ jeweils Tangenten an die obige Parabel.