EF 2.Klausur 10.12.2014

A1. Gib an, welches Symmetrieverhalten bei den folgenden Funktionen erkennbar ist.

a) $f(x) = 3x^7 - 2x^5 + x$ b) $f(x) = 13x^9 - 3.2x^5 + 2x^3 + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^{10} - 3x^6 + 2x^2 + 3$ d) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 16)(x^4 - 1)$

Lösung:

a) Punktsymmetrisch zum Ursprung
b) Keine Symmetrie erkennbar
c) Achsensymmetrisch zur y-Achse
d) Achsensymmetrisch zur y-Achse

A2. Welches Verhalten zeigen die folgenden Funktionen im Unendlichen?

a) $f(x) = 3x^6 - 2x^5 + 3x^2 - 1$ b) $f(x) = -5x^7 + 2x^5 - 3x^3 + x$

Lösung:

a) $x \longrightarrow \infty : f(x) \longrightarrow \infty \quad x \longrightarrow -\infty : f(x) \longrightarrow \infty$
b) $x \longrightarrow \infty : f(x) \longrightarrow -\infty \quad x \longrightarrow -\infty : f(x) \longrightarrow \infty$

A3. Gegeben sind die folgenden Aussagen:
(1) Die Funktion hat genau drei Nullstellen
(2) Die Funktion ist gerade
(3) Die Funktion strebt für $x \longrightarrow \pm\infty$ jeweils gegen $-\infty$
(4) Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung
a) Gib eine Funktion an, welche die Bedingungen (1) und (4) erfüllt.
b) Gib eine Funktion an, für welche die Bedingungen (2) und (3) gelten.
c) Wieso kann es keine Funktion geben, für die (3) und (4) gelten?
d) Gib eine Funktion an, welche die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

Lösung:

a) $f(x) = (x - 1)x(x + 1)$
b) $f(x) = -x^2$
c) Bei punktsymmetrischen Funktionen muss immer ein 'Ast' nach plus und einer nach minus Unendlich gehen.
d) $f(x) = x^2(x^2 - 1)$

A4. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + 7$$

Zeige, dass

$$g(x) = x^2 - 9x + 24$$

die Funktionsgleichung der Funktion ist, deren Graph aus dem von $f(x)$ entsteht, wenn man $f(x)$ um 3 Einheiten nach rechts und eine Einheit nach unten verschiebt.

Lösung:

$$\begin{aligned} g(x) + 1 = (x-3)^2 - 3(x-3) + 7 \Rightarrow (x-3)^2 - 3(x-3) + 6 \\ = x^2 - 6x + 9 - 3x + 9 + 6 \\ = x^2 - 9x + 24 \end{aligned}$$

A5. Der Winter geht, der Frühling kommt und damit die nächste Hochwasserwelle am Rhein. Der Durchgang durch Köln lässt sich für die Uhrzeit von 6:00 Uhr morgens bis 19:00 Uhr abends mit der Funktion:

$$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{13}{5}x - \frac{12}{5}$$

beschreiben. Dabei gibt x die Stunden nach 6:00 Uhr an und $f(x)$ die Höhe des Wasserstands in Metern über dem Normalstand.

a) Vor und nach der 'Welle' ist der Wasserstand unterhalb des Normalstandes. Von wann bis wann ist das jeweils der Fall?
b) Um welche Uhrzeit ist der Wasserstand am höchsten und um wieviel Meter über dem Normalstand steht er dann *ungefähr*?

c) Ab einem Wasserstand von mehr als 5m über dem Normalstand muss die Schifffahrt eingestellt werden. Zwischen welchen Uhrzeiten ist das der Fall?

d) In Düsseldorf kommt die Haochwasserwelle genau sechs Stunden später an; sie ist dort allerdings wegen der geographischen Gegebenheiten (und weil die Düsseldorfer es verdient haben) um einen halben Meter höher. Gibt die Funktion an, mit welcher der Wasserstand in Düsseldorf berechnet werden kann (Der Ansatz reicht, die Funktionsgleichung muss nicht 'ausgerechnet' werden).

Lösung:

a) Die Nullstellen sind $x = 1$ und $x = 12$. Das entspricht den Uhrzeiten von 7:00 Uhr und 18:00 Uhr.

b) Da Parabeln symmetrisch um den Scheitelpunkt sind, muss das Maximum bei $x = 6.5$ liegen. Der Funktionswert dort ist: $f(6.5) = 5.6$.
Der Wasserstand ist um 12:30 Uhr mit 5.6m am höchsten.

c) Hier muss die Gleichung $g(x) = 5$ gelöst werden. Mit dem TR ergeben sich die Lösungen: $x \approx 4.2$ und $x \approx 8.8$. Das entspricht den Uhrzeiten: 10:12 Uhr bis 14:48 Uhr.

d) Der Funktionsgraph muss um 6 nach rechts und um einen halben Meter nach oben verschoben werden, daraus ergibt sich:

$$g(x) - 0.5 = -\frac{1}{5}(x-6)^2 + \frac{13}{5}(x-6) - \frac{12}{5}$$