

2 Schulstunden

Name:

Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung

Wichtig! Schreibe alle Lösungen übersichtlich und ggf. mit einem erläuternden Kommentar. Der Lösungsweg muss erkennbar sein. Alle Ergebnisse sollten, soweit nötig, auf zwei Nachkommastellen gerundet werden.

A1. Gegeben sind die Funktionen:

$$f(x) = -3x + 5 \quad g(x) = \frac{1}{x+3} \quad h(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 1}$$

- Bestimme für die drei obigen Funktionen jeweils die Funktionswerte für $x = 3$ und $x = -5$.
- Gib für die drei Funktionen jeweils die Definitionsmenge an.
- Untersuche rechnerisch, ob die Punkte $A(3/-4)$ und $B(2/\frac{1}{5})$ auf den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ liegen.
- Skizziere den Verlauf des Graphen von $h(x)$ für die x -Werte von -2 bis 4 und gib danach dann den Wertebereich der Funktion an.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f(3) &= -4 & f(-5) &= 20 \\ g(3) &= \frac{1}{6} & g(-5) &= -\frac{1}{2} \\ h(3) &= \sqrt{5} \approx 2.24 & h(-5) &= \sqrt{37} \approx 6.08 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) & \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \\ g(x) & \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \\ h(x) & \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Es ist: $f(3) = -4$, der Punkt A liegt also auf dem Graphen von $f(x)$.
Es ist $f(2) = -1$. Der Punkt B liegt also nicht auf dem Graphen von $f(x)$.
Es ist $g(3) = \frac{1}{6}$. Der Punkt A liegt nicht auf dem Graphen von $g(x)$.
Es ist $g(2) = \frac{1}{5}$. Der Punkt B liegt also auf dem Graphen von $g(x)$.
- Skizze

Daraus ergibt sich, dass der Wertebereich die Zahlen größer als 1 sind.

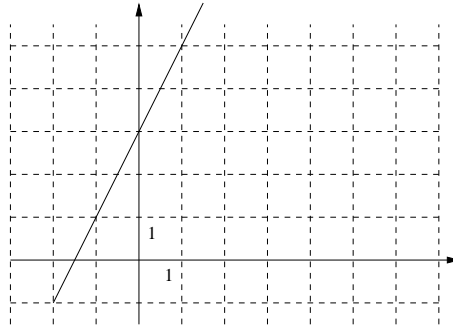
A2. Beurteile, ob die folgenden Aussagen "immer zutreffen", "nie zutreffen" oder "unter bestimmten Bedingungen zutreffen". Gib im letzteren Fall die Bedingung an.

- Der Graph einer Potenzfunktion (Funktion der Form: $f(x) = x^n$) verläuft durch den Ursprung des Koordinatensystems.
- Der Graph einer Potenzfunktion verläuft durch den Punkt $P(-1/-1)$.
- Die Definitionsmenge einer Potenzfunktion besteht nie aus allen Zahlen (\mathbb{R}).

Lösung:

- Trifft immer zu.
- Trifft nur zu, wenn n ungerade ist.
- Trifft nie zu.

A3. Die folgende Skizze zeigt den Graphen der Funktion: $f(x) = 2x + 3$



- a) Gib anhand der Skizze an, welche Steigung eine Gerade haben müsste, die senkrecht zum Graphen von $f(x)$ liegt.
 Tipp: Verwende ein Geodreieck!
- b) Gib die Gleichung der Geraden an, die senkrecht zum Graphen von $f(x)$ verläuft und den gleichen y -Achsen-Abschnitt hat.

Lösung:

- a) Die Steigung ist $-\frac{1}{2}$
 b) Die Gerade hat die Gleichung: $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
- A4. Gib für die folgenden Funktionen an, wie sich der jeweilige Funktionswert verhält, wenn $x \rightarrow \infty$ beziehungsweise $x \rightarrow -\infty$.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - \sqrt{13}$ b) $g(x) = -\frac{13}{17}x^4 + \frac{23}{129}x^2 - \frac{17}{117}$

Lösung:

a) $x \rightarrow \infty : f(x) \rightarrow \infty$
 $x \rightarrow -\infty : f(x) \rightarrow -\infty$
 b) $x \rightarrow \infty : g(x) \rightarrow -\infty$
 $x \rightarrow -\infty : g(x) \rightarrow -\infty$

A5. Berechne alle Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 15$
 c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x$ d) $f(x) = (x - 1)(x^2 + 5x - 3)$

Lösung:

a)

$$0 = \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{9}{10} = x$$

b)

$$0 = x^2 + 2x - 15$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 15}$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 3$$

c)

$$0 = 2x^3 - 3x^2 - 5x$$

$$0 = x(x^2 - 1.5x - 2.5)$$

$$x_1 = 0 \quad x_{2,3} = 0.75 \pm \sqrt{0.75^2 + 2.5}$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{5}{2} = 2.5 \quad x_3 = -1$$

d)

$$\begin{aligned}0 &= (x-1)(x^2 + 5x - 3) \\x_1 = 1 \quad 0 &= x^2 + 5x - 3 \\x_1 = 1 \quad x_{2,3} &= -2.5 \pm \sqrt{2.5^2 + 3} \\x_1 = 1 \quad x_2 &= -2.5 + \sqrt{\frac{37}{4}} \approx 0.54 \quad x_3 = -2.5 - \sqrt{\frac{37}{4}} \approx -5.54\end{aligned}$$

A6. Bestimme bei den folgenden Funktionen alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad f(x) &= x^4 - 26x^2 + 25 \\ \text{b)} \quad f(x) &= (2x^2 - 12x - 14)(x^2 - 2x - 15)\end{aligned}$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}0 &= x^4 - 26x^2 + 25 \\0 &= z^2 - 26z + 25 \\z &= 1 \vee z = 25 \\x^2 &= 1 \vee x^2 = 25 \\x &= -1 \vee x = 1 \vee x = -5 \vee x = 5\end{aligned}$$

Die Schnittpunkte sind daher $(0/25)$, sowie $(-5/0)$, $(-1/0)$, $(1/0)$ und $(5/0)$.

b) Die Nullstellen ergeben sich aus den Lösungen der beiden einzelnen quadratischen Gleichungen, und damit: $(-3/0)$, $(-1/0)$, $(5/0)$ und $(7/0)$.

Für den yAA müssen nur die Absolutglieder multipliziert werden, was den Punkt $(0/210)$ ergibt.

A7. Ein Fallschirmspringer springt aus einem Flugzeug und fällt danach mit einer konstanten Geschwindigkeit. Von unten ergibt eine Messung, dass der Springer 10 Sekunden nach dem Absprung noch eine Höhe von 3740m hat und 30 Sekunden nach dem Absprung noch eine Höhe von 2620m.

- a) Bestimme eine lineare Funktion, die das Verhältnis der Höhe des Fallschirmspringers zu seiner Fallzeit angibt.
Gib dabei an, wofür x und y stehen!
- b) Gib die Höhe an, in der der Fallschirmspringer abgesprungen ist.
- c) In 1500m Höhe wird die Reißleine gezogen und der Fallschirmspringer gleitet daran zu Boden. Bestimme die Dauer des freien Falls.

Lösung:

a) Wenn x die Fallzeit in Sekunden seit dem Absprung ist und y die Höhe des Springers, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}I \quad 3740 &= m \cdot 10 + n \\II \quad 2620 &= m \cdot 30 + n\end{aligned}$$

Die erste Gleichung lässt sich zu: $3740 - 10m = n$ umformen, was in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned}2620 &= 30m + 3740 - 10m \\-1120 &= -20m \\-56 &= m\end{aligned}$$

Setzt man die Steigung in die erste Gleichung ein, ergibt sich: $n = 3740 - 10 \cdot (-56) = 4300$.

Somit lautet die Gleichung: $y = -56x + 4300$

b) Der Springer ist in 4300m Höhe abgesprungen.

c)

$$\begin{aligned}-56x + 4300 &= 1500 \\-56x &= -2800 \\x &= 50\end{aligned}$$

Der freie Fall dauert 50 Sekunden.

A8. Ein Tennisplatz ist 23,77m lang. Das Netz, welches die beiden Hälften trennt ist in der Mitte genau 91,4cm hoch.

Ein Tennisspieler schlägt seinen Ball auf der Höhe der Grundlinie in einem Meter Höhe in Richtung des gegnerischen Feldes. Die Bahn des Tennisballs kann dabei mit der Funktion:

$$g(x) = -0,0032x^2 + 0.0379x + 1$$

modelliert werden (x gibt die Entfernung von der Grundlinie in Metern an und $g(x)$ die Höhe des Ballmittelpunktes in Metern.)

- a) Berechne, ob der Ball über das Netz fliegt, wenn du davon ausgehst, dass die Funktion die Kurve des Mittelpunktes des Balls angibt und der Ball einen Durchmesser von 6,5cm hat.
- b) Berechne, ob der Ball noch innerhalb des Feldes landet, wenn der Gegner ihn nicht erreicht.

Lösung:

- a) Hier ist der Funktionswert der Funktion bei $x = 11.885$ gesucht. Da $f(11.885) \approx 0.99$ kann davon ausgegangen werden, dass der Ball über das Netz fliegt.
- b) Hier sind zwei Herangehensweisen denkbar:
 - 1. Der Funktionswert am Ende des Feldes wird berechnet. Dieser ist: $f(23.77) \approx 0.1$
Da der Ball über das Netz fliegt und einer nach unten geöffneten Parabel folgt, kann er das Feld nicht mehr erreichen, wenn er am Ende des Feldes noch 10cm hoch fliegt.
 - 2. Man berechnet die Nullstellen der Funktion. Diese sind (p-q-Formel): $x \approx -12.72$ und $x \approx 24.56$.
Somit landet der Ball erst hinter dem 23.77m langen Feld.

2 Schulstunden

Name:

Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung

Wichtig! Schreibe alle Lösungen übersichtlich und ggf. mit einem erläuternden Kommentar. Der Lösungsweg muss erkennbar sein. Alle Ergebnisse sollten, soweit nötig, auf zwei Nachkommastellen gerundet werden.

A1. Gegeben sind die Funktionen:

$$f(x) = 2x - 5 \quad g(x) = \frac{1}{x-3} \quad h(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 4}$$

- Bestimme für die drei obigen Funktionen jeweils die Funktionswerte für $x = 3$ und $x = -5$.
- Gib für die drei Funktionen jeweils die Definitionsmenge an.
- Untersuche rechnerisch, ob die Punkte $A(2/-1)$ und $B(4/1)$ auf den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ liegen.
- Skizziere den Verlauf des Graphen von $h(x)$ für die x -Werte von -2 bis 4 und gib danach dann den Wertebereich der Funktion an.

Lösung:

a)

$$\begin{array}{ll} f(3) = 1 & f(-5) = -15 \\ g(3) = \text{nicht def.} & g(-5) = -\frac{1}{8} \\ h(3) = \sqrt{8} \approx 2.83 & h(-5) = \sqrt{40} \approx 6.32 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} f(x) & \mathbb{D} = \mathbb{R} \\ g(x) & \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ h(x) & \mathbb{D} = \mathbb{R} \end{array}$$

- Es ist: $f(2) = -1$, der Punkt A liegt also auf dem Graphen von $f(x)$.
Es ist $f(4) = 3$. Der Punkt B liegt also nicht auf dem Graphen von $f(x)$.
Es ist $g(2) = -1$. Der Punkt A liegt auf dem Graphen von $g(x)$.
Es ist $g(4) = 1$. Der Punkt B liegt also auf dem Graphen von $g(x)$.

d) Skizze

Daraus ergibt sich, dass der Wertebereich die Zahlen größer als 2 sind.

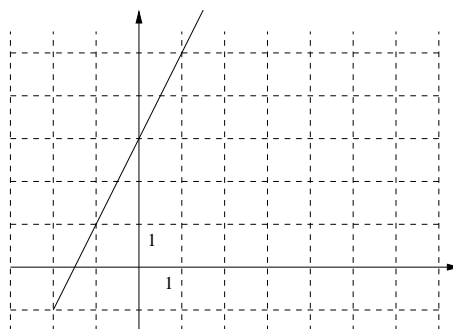
A2. Beurteile, ob die folgenden Aussagen "immer zutreffen", "nie zutreffen" oder "unter bestimmten Bedingungen zutreffen". Gib im letzteren Fall die Bedingung an.

- Der Graph jeder Potenzfunktion (Funktion der Form: $f(x) = x^n$) verläuft durch den Punkt $P(1/1)$.
- Der Graph einer Potenzfunktion verläuft durch den Punkt $P(-1/-1)$.
- Die Definitionsmenge einer Potenzfunktion besteht nie aus allen Zahlen (\mathbb{R}).

Lösung:

- Trifft immer zu.
- Trifft nur zu, wenn n ungerade ist.
- Trifft nie zu.

A3. Die folgende Skizze zeigt den Graphen der Funktion: $f(x) = 2x + 3$



- a) Gib anhand der Skizze an, welche Steigung eine Gerade haben müsste, die senkrecht zum Graphen von $f(x)$ liegt.
Tipp: Verwende ein Geodreieck!
- b) Gib die Gleichung der Geraden an, die senkrecht zum Graphen von $f(x)$ verläuft und den gleichen y -Achsen-Abschnitt hat.

Lösung:

- a) Die Steigung ist $-\frac{1}{2}$
b) Die Gerade hat die Gleichung: $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
- A4. Gib für die folgenden Funktionen an, wie sich der jeweilige Funktionswert verhält, wenn $x \rightarrow \infty$ beziehungsweise $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{a) } f(x) = -x^3 - 2x^2 + 7x - \sqrt{13} \quad \text{b) } g(x) = \frac{1}{7}x^3 - \frac{13}{17}x^4 + \frac{23}{129}x^2 - \frac{17}{117}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } & x \rightarrow \infty : f(x) \rightarrow -\infty \\ & x \rightarrow -\infty : f(x) \rightarrow \infty \\ \text{b) } & x \rightarrow \infty : g(x) \rightarrow \infty \\ & x \rightarrow -\infty : g(x) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

HIER GEHTS WEITER

- A5. Berechne alle Nullstellen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} \text{a) } & f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{3}{5} & \text{b) } & f(x) = x^2 + 2x - 15 \\ \text{c) } & f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x & \text{d) } & f(x) = (x-1)(x^2 + 5x - 3) \end{aligned}$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{3}x - \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} &= \frac{2}{3}x \\ \frac{9}{10} &= x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2x - 15 \\ x_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1^2 + 15} \\ x_1 &= -5 \quad x_2 = 3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^3 - 3x^2 - 5x \\ 0 &= x(x^2 - 1.5x - 2.5) \\ x_1 &= 0 \quad x_{2,3} = 0.75 \pm \sqrt{0.75^2 + 2.5} \\ x_1 &= 0 \quad x_2 = \frac{5}{2} = 2.5 \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 0 &= (x-1)(x^2 + 5x - 3) \\ x_1 &= 1 \quad 0 = x^2 + 5x - 3 \\ x_1 &= 1 \quad x_{2,3} = -2.5 \pm \sqrt{2.5^2 + 3} \\ x_1 &= 1 \quad x_2 = -2.5 + \sqrt{\frac{37}{4}} \approx 0.54 \quad x_3 = -2.5 - \sqrt{\frac{37}{4}} \approx -5.54 \end{aligned}$$

A6. Bestimme bei den folgenden Funktionen alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

- a) $f(x) = x^4 - 26x^2 + 25$
 b) $f(x) = (2x^2 - 12x - 14)(x^2 - 2x - 15)$

Lösung:

a)

$$0 = x^4 - 26x^2 + 25$$

$$0 = z^2 - 26z + 25$$

$$z = 1 \vee z = 25$$

$$x^2 = 1 \vee x^2 = 25$$

$$x = -1 \vee x = 1 \vee x = -5 \vee x = 5$$

Die Schnittpunkte sind daher $(0/25)$, sowie $(-5/0)$, $(-1/0)$, $(1/0)$ und $(5/0)$.

b) Die Nullstellen ergeben sich aus den Lösungen der beiden einzelnen quadratischen Gleichungen, und damit: $(-3/0)$, $(-1/0)$, $(5/0)$ und $(7/0)$.

Für den yAA müssen nur die Absolutglieder multipliziert werden, was den Punkt $(0/210)$ ergibt.

A7. Ein Fallschirmspringer springt aus einem Flugzeug und fällt danach mit einer konstanten Geschwindigkeit. Von unten ergibt eine Messung, dass der Springer 10 Sekunden nach dem Absprung noch eine Höhe von 3740m hat und 30 Sekunden nach dem Absprung noch eine Höhe von 2620m.

a) Bestimme eine lineare Funktion, die das Verhältnis der Höhe des Fallschirmspringers zu seiner Fallzeit angibt.

Gib dabei an, wofür x und y stehen!

b) Gib die Höhe an, in der der Fallschirmspringer abgesprungen ist.

c) In 1500m Höhe wird die Reißleine gezogen und der Fallschirmspringer gleitet daran zu Boden. Bestimme die Dauer des freien Falls.

Lösung:

a) Wenn x die Fallzeit in Sekunden seit dem Absprung ist und y die Höhe des Springers, dann ergibt sich:

$$I \quad 3740 = m \cdot 10 + n$$

$$II \quad 2620 = m \cdot 30 + n$$

Die erste Gleichung lässt sich zu: $3740 - 10m = n$ umformen, was in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt:

$$2620 = 30m + 3740 - 10m$$

$$-1120 = -20m$$

$$-56 = m$$

Setzt man die Steigung in die erste Gleichung ein, ergibt sich: $n = 3740 - 10 \cdot (-56) = 4300$.

Somit lautet die Gleichung: $y = -56x + 4300$

b) Der Springer ist in 4300m Höhe abgesprungen.

c)

$$-56x + 4300 = 1500$$

$$-56x = -2800$$

$$x = 50$$

Der freie Fall dauert 50 Sekunden.

A8. Ein Tennisplatz ist 23,77m lang. Das Netz, welches die beiden Hälften trennt ist in der Mitte genau 91,4cm hoch.

Ein Tennisspieler schlägt seinen Ball auf der Höhe der Grundlinie in einem Meter Höhe in Richtung des gegnerischen Feldes. Die Bahn des Tennisballs kann dabei mit der Funktion:

$$g(x) = -0,0032x^2 + 0.0379x + 1$$

modelliert werden (x gibt die Entfernung von der Grundlinie in Metern an und $g(x)$ die Höhe des Ballmittelpunktes in Metern.)

- a) Berechne, ob der Ball über das Netz fliegt, wenn du davon ausgehst, dass die Funktion die Kurve des Mittelpunkts des Balls angibt und der Ball einen Durchmesser von 6,5cm hat.
- b) Berechne, ob der Ball noch innerhalb des Feldes landet, wenn der Gegner ihn nicht erreicht.

Lösung:

- a) Hier ist der Funktionswert der Funktion bei $x = 11.885$ gesucht. Da $f(11.885) \approx 0.99$ kann davon ausgegangen werden, dass der Ball über das Netz fliegt.
- b) Hier sind zwei Herangehensweisen denkbar:
 - 1. Der Funktionswert am Ende des Feldes wird berechnet. Dieser ist: $f(23.77) \approx 0.1$
Da der Ball über das Netz fliegt und einer nach unten geöffneten Parabel folgt, kann er das Feld nicht mehr erreichen, wenn er am Ende des Feldes noch 10cm hoch fliegt.
 - 2. Man berechnet die Nullstellen der Funktion. Diese sind (p-q-Formel): $x \approx -12.72$ und $x \approx 24.56$.
Somit landet der Ball erst hinter dem 23.77m langen Feld.