Städtisches Gymnasium Eschweiler — Cremer, Kalhöfer
Mathematik Grundkurs EF/I — 2018/19
2.Klausur — 5.1.2019

Teil 1

20 Minuten

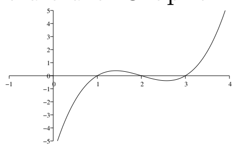
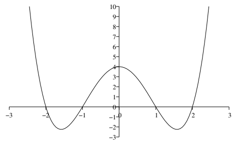
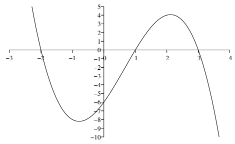
Name: **Hilfsmittel:** Keine!

Wichtig! Schreibe alle Lösungen übersichtlich und ggf. mit einem erläuternden Kommentar. Der Lösungsweg muss erkennbar sein. Alle Ergebnise sollten, soweit nötig, auf zwei Nachkommastellen gerundet werden.

A1. Gegeben sind die drei Funktionsgleichungen:

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \qquad g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \qquad h(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$$

sowie die drei Graphen:

a)  b)  c) 

Gib begründet an, welcher Funktionsgraph zu welcher Funktionsgleichung gehört.

Lösung:

a) - g(x), b) - f(x), c) - h(x)

(6)

A2. Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x$$

a) Gib den Grad der Funktion an
b) Bestimme alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
c) Gib alle möglichen Aussagen zur Symmentrie des Funktionsgraphen an
d) Gib das Verhalten des Funktionsgraphen für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an.

Lösung:

a) Der Grad ist 3.

(1)

b) Der yAA ist 0 (Punkt: (0/0))
Für die Nullstellen gilt:

$$0 = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x$$
$$x_1 = 0 \vee 0 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$
$$0 = x^2 - 6x + 8$$
$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-8}$$
$$x_2 = 2 \vee x_3 = 4$$

(0/0), (2/0), (4/0)

(6)

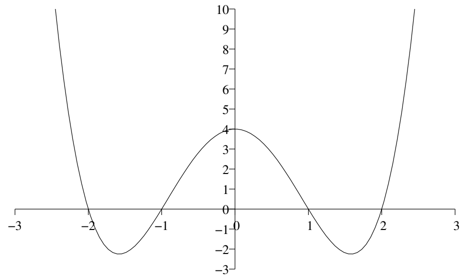
c) Keine Aussage zur Symmetrie möglich

(1)

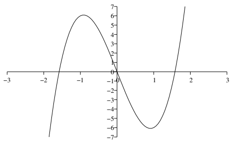
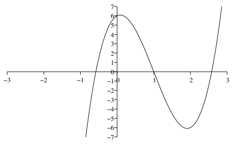
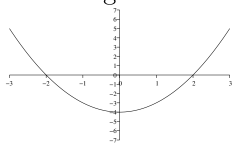
d) $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$ und $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$

(2)

A3. Gegeben ist der Graph einer Funktion $f(x)$:



Gib begündet an, welcher der folgenden Graphen **nicht** Graph der Ableitungsfunktion von $f(x)$ sein kann und welcher der Graphen demnach der Graph der Ableitungsfunktion ist.

a)  b)  c) 

Lösung:

a) Ist der Graph der Ableitungsfunktion

b) Kann nicht Graph der Ableitungsfunktion sein, weil der Funktionswert an der Stelle Null nicht Null ist.

c) Kann nicht Graph der Ableitungsfunktion sein, weil der Funktionswert an der Stelle Null nicht Null ist.

(5)

Städtisches Gymnasium Eschweiler — Cremer, Kalhöfer
Mathematik Grundkurs EF/I — 2018/19
2.Klausur — 5.1.2019

Teil 2

70 Minuten

Name: **Hilfsmittel:** GTR, Formelsammlung

Wichtig! Schreibe alle Lösungen übersichtlich und ggf. mit einem erläuternden Kommentar. Der Lösungsweg muss erkennbar sein. Alle Ergebnise sollten, soweit nötig, auf zwei Nachkommastellen gerundet werden.

A4. Gegeben ist der Graph einer Funktion durch seine Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

a) Berechne die Gleichung der Funktion, deren Graph sich aus dem von $f(x)$ ergibt, wenn man ihn um eine Einheit nach links und zwei Einheiten nach oben verschiebt.

b) Berechne die Gleichung der Funktion, deren Graph sich aus dem von $f(x)$ ergibt, wenn man ihn in y-Richtung auf die Hälfte staucht und dann an der x-Achse spiegelt.

Lösung:

a)

$$g(x) - 2 = (x+1)^2 - 3(x+1) + 5$$
$$g(x) = x^2 - x + 5$$

(2)

b)

$$2g(x) = -x^2 + 3x - 5$$
$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

(2)

A5. Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2.25x \qquad \text{und} \quad g(x) = 2.25x$$

a) Bestimme die Nullstellen von $f(x)$.

b) Gib an, ob die Punkte $A(5/111.25)$ und $B(1/6.25)$ auf dem Funktionsgraphen liegen.

c) Ermittle den Wert von t, damit $C(3/12.15t)$ auf dem Graphen von $f(x)$ liegt.

d) Bestimme den Schnittpunkt von $f(x)$ und $g(x)$.

Lösung:

a) Es ist $0 = x^3 + 3x^2 + 2.25x$. Mit dem GTR ergeben sich die Lösungen: $x = 0$, $x = -1.5$. (3)

b) A liegt nicht auf dem Graphen, B liegt auf dem Graphen. (2)

c) $f(3) = 60.75$, daher muss gelten: $12.15t = 60.75$. Dies ist für $t = 5$ der Fall. (2)

d) Hier ergibt sich die Gleichug $0 = x^3 + 3x^2$. Diese hat die Lösungen $x = 0$ und $x = -3$. (3)

A6. In einem Freizeitpark, der von 9 bis 20 Uhr geöffnet ist, wurde die Anzahl b der Besucher in Tausend an einem bestimmten Tag zu verschiedenen Zeiten t untersucht. Die erfassten Daten liegen auf einer Kurve, die näherungsweise durch dir folgende Funktionsgleichung beschrieben werden kann.

$$b(t) = -\frac{1}{20}t^3 + \frac{9}{5}t^2 - \frac{96}{5}t + \frac{125}{2} \qquad \text{für} \quad 10 \le t \le 19.5$$

a) Bestimme die Anzahl der Besucher, die um 12:00 Uhr im Park waren.

b) In den Imbissbuden des Parks arbeitet in der Regel nur eine Person. Aus Erfahrung weiß man, dass ab einer Besucherzahl von 9500 Besuchern zwei Bedienungen in den Buden nötig sind. Gib den Zeitraum an, in dem zwei Personen pro Imbiss arbeiten sollten und erläutere dein Vorgehen.

c) Gib an, zu welchem Zeitpunkt sich die meisten Besucher im Park befanden und wieviele das waren.

Lösung:

a) Es ist $f(12) = 4.9$ Es befanden sich also 4900 Besucher im Park.

(2)

b) Lässt man sich auf dem GTR die um 9.5 verminderte Funktion ausgeben, dann lassen sich von dieser Funktion die Nullstellen bestimmen. Diese sind $x = 14.11$ und $x = 17.63$. Dies entspricht den Uhrzeiten: 14:07 und 17:38 Uhr. Zwischen diesen beiden Zeiten sollten zwei Leute pro Imbiss arbeiten.

(4)

c) Mit dem GTR lässt das Maximum des Funktionsgraphen im angegebenen Zeitraum zu (16/11.3) ermitteln. Um 16:00 waren mit 11300 Menschen die meisten Besucher im Park.

(3)

A7. Berechne mit der h-Methode die Ableitungsfunktion von $f(x) = 2x^2 - 3x$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{2(x+h)^2 - 3(x+h) - [2x^2 - 3x]}{h} \\ &= \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 3x - 3h - 2x^2 + 3x}{h} \\ &= \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h - 2x^2 + 3x}{h} \\ &= \frac{4xh + 2h^2 - 3h}{h} \\ &= \frac{h(4x + 2h - 3)}{h} \\ &= 4x + 2h - 3\end{aligned}$$

Da weiterhin $4x + 2h - 3 \to 4x - 3$ für $h \to 0$, ist $f'(x) = 4x - 3$ die Ableitungsfunktion von $f(x)$.

(4)

A8. Gib die Ableitungsfunktionen für die folgenden Funktionen an:

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x \qquad g(x) = 2x^{-5} + 3x^{-3} \qquad h(x) = 1 + \sqrt[3]{x^2}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 9x^2 - 4x + 5 \\ g'(x) &= -10x^{-6} - 9x^{-4} \\ h'(x) &= \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

(3)