1. Klausur 1. Semester

Mathematik Cremer

Hilfsmittelfreier Teil

Bearbeitungszeit: 20 min.

Erinnerung an die Operatoren:
Gib an bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
Bestimme bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen.
Berechne bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.

Begründe bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A1. Gib zu den folgenden Beschreibungen an, ob es sich um ein Zufallsexperiment handelt oder nicht.

a) In einem Supermarkt sind alle Waren mit Preisen ausgezeichnet. Herr A. kauft 3 Apfelsinen, 2 Liter Milch und eine Pizza. Ergebnis des Experiments ist der zu zahlende Gesamtpreis.

b) In einer Urne befinden sich 3 schwarze und zwei rote Kugeln. Eine Kugel wird gezogen. Das Ergebnis des Experiments ist die Farbe der Kugel.

c) Für einen bestimmten Tag hat der NABU dazu aufgerufen alle Vögel zu zählen, die im eigenen Garten an diesem Tag gesehen werden können. Ergebnis des Experiments ist die Anzahl der gesichteten Spatzen.

d) Eine Maschine braucht zum Betrieb 7,3l Diesel pro Stunde. Im Tank befinden sich noch genau 233,4l Dieselkraftstoff. Das Ergebnis des Experiments ist die Restlaufzeit der Maschine ohne Nachtanken.

Lösung:

a) Kein Zufallsexperiment

b) Zufallsexperiment

c) Zufallsexperiment

d) Kein Zufallsexperiment

A2. In einer Urne befinden sich sechs rote und drei grüne Kugeln. Aus dieser Urne wird eine Kugel gezogen, die nicht zurück gelegt wird. Anschließend wird eine zweite Kugel gezogen.

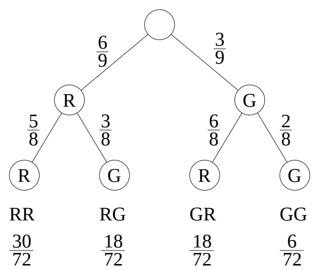
a) Stelle das obige Zufallsexperiment in einem vollständigen Baumdiagramm dar.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Kugel 'rot' ist.
Tipp: Gib die Wahrscheinlichkeit als ungekürzten Bruch an.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide gezogenen Kugeln 'grün' sind und verwende dabei das Ergebnis aus b). Sollte b) nicht gelöst worden sein, dann nimm an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Kugel 'rot' ist als $\frac{68}{72}$ an.
Tipp: Das reine Ablesen der Wahrscheinlichkeit vom Baumdiagramm reicht **nicht**!

Lösung:

a)



b) Es ist:

$$\begin{aligned} P(min.1rot) &= P(RR) + P(RG) + P(GR) \\ &= \frac{30}{72} + \frac{18}{72} + \frac{18}{72} \\ &= \frac{66}{72} \end{aligned}$$

c) Es ist:

$$\begin{aligned} P(GG) &= 1 - P(min.1rot) \\ &= 1 - \frac{66}{72} \\ &= \frac{6}{72} \end{aligned}$$

A3. In einem Zufallsexperiment werden nacheinander zwei Würfel geworfen.
Tipp: Versuche nicht, das Zufallsexperiment in einem Baumdiagramm darzustellen, nutze besser eine Tabelle, wenn du eine Darstellung brauchst.

a) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Summe der Augenzahlen 3 ist.
b) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Summe der Augenzahlen 7 ist.
c) Gib die Ergebnisse an, die zu dem Ereignis: 'Das Produkt der Augenzahlen ist 12' gehören und die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.
d) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass mindestens einer der Würfel eine '6' zeigt.

Lösung:

a) $P(Summe3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0.055 \approx 5.6\%$
a) $P(Summe7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.166 \approx 16.7\%$
c) 3/4, 4/3, 2/6, 6/2
$P(Produkt12) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0.111 \approx 11.1\%$
d) $P(min.1'6') = \frac{11}{36} = 0.30555 \approx 30.6\%$

Hilfsmittelteil

Erinnerung an die Operatoren:
Gib an bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
Bestimme bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen.
Berechne bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.

Begründe bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A4. Bei den folgenden drei Teilaufgaben handelt es sich jeweils um ein eigenes Zufallsexperiment.

a) Ein normaler Spielwürfel wurde 60 mal geworfen. Dabei wurde 9 mal die '5' geworfen. Bestimme die relative Häufigkeit der '5' in Prozent!

b) Bei einem Zufallsexperiment wird ein normaler Spielwürfel 250 mal geworfen. Die relative Häufigkeit der '3' war dabei 16%. Bestimme die absolute Häufigkeit der '3' bei diesem Experiment.

c) Bei einem Zufallsexperiment wird mit einem normalen Spielwürfel gewürfelt. Die '2' kam dabei 49 mal, was einer relativen Häufigkeit von 14% entspricht. Bestimme wie oft das Zufallsexperiment durchgeführt wurde.

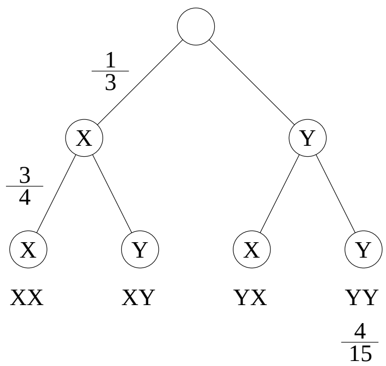
Lösung:

a) Es ist: $9 \div 60 = 0.15 = 15\%$

b) Es ist: $250 \cdot \frac{16}{100} = 40$. Die '3' ist 40 mal geworfen worden.

c) Es ist: $\frac{49}{n} = 0.14 \Leftrightarrow n = \frac{49}{0.14} = 350$.

A5. Gegeben ist das folgende, unvollständige Baumdiagramm:



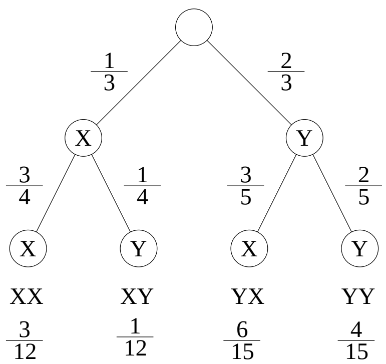
a) Übertrage das Diagramm auf deinen Klausurbogen und vervollständige es.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ergebnis ein 'X' und ein 'Y' enthält.

c) Gib begründet an, ob das Baumdiagramm eine abhängige oder unabhängige Wahrscheinlichkeit darstellt.

Lösung:

a)



b) Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis ein 'X' und ein 'Y' enthält beträgt:

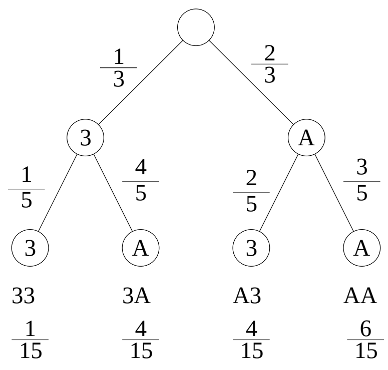
$$\begin{aligned} P('X'und'Y') &= P(XY) + P(YX) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{6}{15} \\ &= \frac{29}{60} = 0.48\overline{3} \approx 48.3\% \end{aligned}$$

c) Weil die Wahrscheinlichkeiten beim linken Teilbaum der zweiten Stufe von denen des rechten Teilbaums abweicht, zeigt das Baumdiagramm eine abhängige Wahrscheinlichkeit.

A6. Ein Spielwarengeschäft erhält eine Lieferung mit 50 gleichen Spielzeugen. Um die Lieferung zu tresten werden zwei Spielzeuge entnommen und getestet. Nur wenn beide Spielzeuge einwandfrei funktionieren, wird die Lieferung angenommen. Ansonsten wird sie retourniert.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit mit der die Lieferung angenommen wird, obwohl die Lieferung 10 defekte Spielzeuge enthält?
Lösung:
Bei der ersten Entnahme ist die Wahrscheinlichkeit ein einwandfreies Spielzeug zu 'ziehen':
$p(einwandfrei) = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$.
Bei der zweiten Ziehung ist die Wahrscheinlichkeit:
$p(einwandfrei) = \frac{39}{49}$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spielzeuge einwandfrei sind ist dann:
$p(ok) = \frac{4}{5} \cdot \frac{39}{49} = \frac{156}{245} \approx 0.6367$.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 63,7% wird die Lieferung dennoch angenommen.

A7. Drei Prozent der deutschen Bevölkerung sind zuckerkrank. Ein Test zeigt bei 96% der Kranken diese Erkrankung auch richtig an. Bei den Gesunden ergibt der Test bei 6% ein irrtümlich positives Ergebnis.
Bestimme den Prozentsatz derjenigen aus einer repräsentativen Testgruppe, die ein positives Ergebnis erhalten werden.
Lösung:
Eine zufällig gewählte Person ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 3% krank. Von diesen erhalten 96% ein positives Ergebnis. Das macht einen Anteil an den Ergebnissen von:
$0.03 \cdot 0.96 = 0.0288$
aus. Mit 97% Wahrscheinlichkeit ist die gewählte Person gesund und erhält dann mit 6% ein positives Testergebnis, was insgesamt ergibt:
$0.97 \cdot 0.06 = 0.0582$
Zusammen genommen bekommen daher: $0.0288 + 0.0582 = 0.087 = 8.7\%$ aller Testpersonen ein positives Ergebnis.

A8. In einer Urne befinden sich sechs Kugeln mit den Aufschriften: '1', '2', '3', '3', '4' und '6'. Aus dieser Urne darf ein Spieler zwei Kugeln ziehen (ohne Zurücklegen). Zeigen beide eine '3' erhält er 20€ . Zeigt nur eine der beiden Kugeln eine '3', dann erhält er 5€ .
Berechne für welchen Einsatz dieses Spiel fair ist!
Lösung:
Zunächst muss ermittelt werden, mit welchen Wahrscheinlichkeiten es zu welchen Auszahlungen kommt.



Damit betragen die Wahrscheinlichkeiten für eine Auszahlung:

Auszahlung	0	5	20
Wahrsch.	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten kann nun der Erwartungswert berechnet werden:

$$\mu = 0 \cdot \frac{6}{15} + 5 \cdot \frac{8}{15} + 20 \cdot \frac{1}{15} = 4$$

Damit das Spiel fair ist, muss der Einsatz 4€ betragen.