2. Klausur 1. Semester

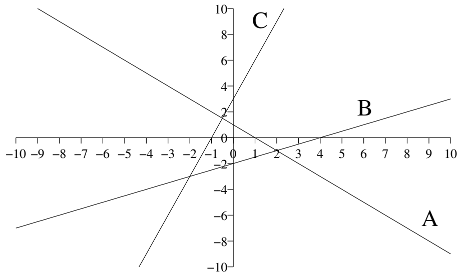
Mathematik Cremer

Hilfsmittelfreier Teil

Bearbeitungszeit: 20 min.

Erinnerung an die Operatoren:
Gib an bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
Bestimme bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen.
Berechne bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
Begründe bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A1. Im Folgenden sind drei Graphen von linearen Funktionen gegeben:



Außerdem sind die folgenden drei Funktionsgleichungen gegeben:

$$f(x) = 3x + 3 \qquad g(x) = \frac{1}{2}x - 2 \qquad h(x) = -x + 1$$

Gib an, welcher Graph zu welcher Funktionsgleichung gehört.
Lösung:
A:$h(x)$, B: $g(x)$, C: $f(x)$

A2. Gegeben ist eine Gerade durch die Gleichung

$$f(x) = 2x + 3$$

Gib die Gleichung einer linearen Funktion $g(x)$ an, deren Graph eine Gerade ist, die zu der von $f(x)$ parallel ist und die y-Achse beim Wert -5 schneidet.
Lösung:
$g(x) = 2x - 5$

A3. Gegeben ist eine Gerade durch die Gleichung

$$f(x) = 2x + 3$$

Berechne, ob sich die Punkte $A(10/23)$ und $B(100/197)$ auf dem Graph der Funktion befinden.
Lösung:

$$\begin{aligned} A: \quad & 23 = 2 \cdot 10 + 3 \\ & 23 = 20 + 3 \\ & 23 = 23 \qquad A \text{ liegt auf der Geraden} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B: \quad & 197 = 2 \cdot 100 + 3 \\ & 197 = 200 + 3 \\ & 197 = 203 \qquad B \text{ liegt nicht auf der Geraden} \end{aligned}$$

A4. Bestimme rechnerisch den Schnittpunkt der Funktionen

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = -2x - 5$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
2x + 3 &= -2x - 5 \\
2x &= -2x - 8 \\
4x &= -8 \\
x &= -2
\end{aligned}
$$

Setzt man diesen x-Wert in eine der Gleichungen ein, erhält man als y-Wert: $f(-2) = 2\cdot(-2)+3 = -1$.
Somit ist der Schnittpunkt $S(-2/-1)$

A5. Gib bei den folgenden Funktionen an, ob die zu ihnen gehörige Parabel nach oben oder unten geöffnet ist und ob sie gestaucht, normal oder gestreckt ist.

a)	$f(x) = x^2 - 3x + 7$	b)	$f(x) = -2x^2 + 100$
c)	$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{3}{7}$	d)	$f(x) = 1275x^2$

Lösung:

a) oben, normal
b) unten, gestreckt
c) unten, gestaucht
d) oben gestreckt

Hilfsmittelteil

Erinnerung an die Operatoren:
Gib an bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
Bestimme bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen.
Berechne bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
Begründe bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A6. Begründe, wieso die Graphen der Funktionen

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = 2x + 3$$

zwei Schnittpunkte haben müssen.
Lösung:
$g(x)$ schneidet die y-Achse bei $y = 3$, also genau oberhalb des Scheitelpunktes der (Normal)Parabel (Dieser Punkt liegt also '*zwischen*' den beiden Parabelästen). Da die Gerade sich unendlich weit nach lins und rechts erstreckt, muss sie die Parabel jeweils einmal auf jeder Seite schneiden.

A7. Berechne die Nullstellen der Funktionen

$$\text{a)} \quad f(x) = x^2 - 2x - 3 \qquad \text{b)} \quad f(x) = 2x^2 - 18x + 28$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \qquad 0 &= x^2 - 2x - 3 \\
x_{1,2} &= -\tfrac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-2}{2}\right)^2 - (-3)} \\
&= 1 \pm \sqrt{1 + 3} \\
&= 1 \pm 2 \\
x_1 = 3 &\;\vee\; x_2 = -1 \\
\text{b)} \qquad 0 &= 2x^2 - 18x + 28 \\
&= x^2 - 9x + 14 \\
x_{1,2} &= -\tfrac{-9}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-9}{2}\right)^2 - 14} \\
&= \tfrac{9}{2} \pm \sqrt{\tfrac{81}{4} - \tfrac{56}{4}} \\
&= \tfrac{9}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4}} \\
&= \tfrac{9}{2} \pm \tfrac{5}{2} \\
x_1 = 7 &\;\vee\; x_2 = 2
\end{aligned}$$

A8. Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel zu

$$f(x) = x^2 - 4x + 10$$

Lösung:
Zunächst gilt, dass: $0 = x^2 - 4x$ die Lösungen $x = 0$ und $x = 4$ haben muss. Die x-Koordinate des Scheitelpunktes liegt genau dazwischen, also bei $x = 2$.
Da $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 10 = 6$ ist, liegt der Scheitelpunkt bei: $S(2/6)$.

A9. Bestimme die Schnittpunkte der Funktionen

$$f(x) = x^2 - 2x + 6 \quad \text{und} \quad g(x) = 2x + 3$$

Lösung:
Die Funktionsterme müssen gleich gesetzt werden:

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x + 6 &= 2x + 3 \\
x^2 - 4x + 3 &= 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen (GTR) $x = 1$ und $x = 3$. Da die Schnitt**punkte** berechnet werden sollen müssen noch die Schnittpunkte bestimmt werden. Durch Einsetzen in $g(x)$ erhält man: $S_1(1/5)$ und $S_2(3/9)$.

A10. Berechne die Gleichung der quadratischen Funktion, deren Parabel durch die Punkte $A(0/2)$, $B(1/4)$ und $C(-1/-2)$ geht.

Lösung:

Durch Einsetzen der Punktwerte in die allgemeine Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ erhält man das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
2 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\
4 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\
-2 &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 &= c \\
4 &= a + b + 2 \\
-2 &= a - b + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 &= c \\
2 &= a + b \\
-4 &= a - b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 &= c \\
2 - b &= a \\
-4 &= 2 - b - b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 &= c \\
2 - b &= a \\
-6 &= -2b \\
2 &= c \\
-1 &= a \\
3 &= b
\end{aligned}$$

Damit ist

$$f(x) = -[1]x^2 + 3x + 2$$

A11. Beim Kugelstoßen kann der Flug einer Kugel durch die Funktion:

$$f(x) = -\frac{19}{120}x^2 + \frac{83}{60}x + 2$$

modelliert werden, wenn man davon ausgeht, dass der Werfer mit seinem Füßen im Ursprung eines Koordinatensystems steht und eine Einheit einem Meter entspricht.

a) Gib an, was der y-Achsen-Abschnitt 2 in diesem Zusammenhang bedeutet.

b) Bestimme (**GTR!!!**) wie weit vom Werfer entfernt die Kugel wieder auf dem Boden landet.

Lösung:

a) Er bedeutet, dass die Kugel in einer Höhe von zwei Metern abgeworfen wird.

b) Die Nullstellen der Funktion (= Höhe über dem Boden) sind $x = -\frac{24}{19}$ und $x = 10$. Da nicht davon auszugehen ist, dass der Werfer *rückwärts* wirft, trifft die Kugel nach 10m.

Nachschreibeklausur 1. Semester

Mathematik Cremer

Hilfsmittelfreier Teil

Bearbeitungszeit: 20 min.

Erinnerung an die Operatoren:
Gib an bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
Bestimme bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen.
Berechne bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
Begründe bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A1. In einer Urne befinden sich 2 weiße und 5 schwarze Kugeln. Aus dieser Urne wird zunächst eine Kugel gezogen, die nicht zurück gelegt wird. Danach wird eine zweite Kugel gezogen.

a) Stelle das obige Experiment in einem vollständigen (Alle Pfadwahrscheinlichkeiten, Ergebnisse und deren Wahrscheinlichkeiten) Baumdiagramm dar.

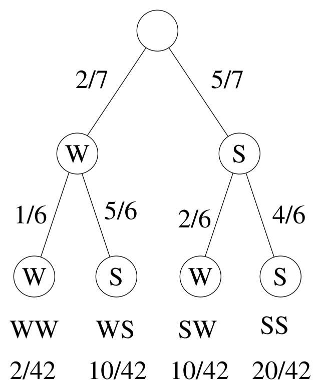
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Kugel 'weiß' ist.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln schwarz sind und verwende dazu das Ergebnis der Teilaufgabe b).

d) Gib begründet an, ob es sich bei diesem Experiment um eine abhängige oder unabhängige Wahrscheinlichkeit handelt.

Lösung:

a)



b) Es ist:

$$\begin{aligned} P(min.1\text{weiß}) &= P(WW) + P(WS) + P(SW) \\ &= \frac{2}{42} + \frac{10}{42} + \frac{10}{42} \\ &= \frac{22}{42} \approx 0.52 = 52\% \end{aligned}$$

c) Es ist:

$$\begin{aligned} P(SS) &= 1 - P(min.1\text{weiß}) \\ &= 1 - \frac{22}{42} \\ &= \frac{20}{42} \approx 0.48 = 48\% \end{aligned}$$

d) Es handelt sich um eine abhängige Wahrscheinlichkeit, weil die Wahrscheinlichkeiten im linken Teilbaum andere sind als die im rechten.

A2. Eine Gerade hat die Steigung 2 und den y-Achsen-Abschnitt 3. Eine weitere Gerade hat die Steigung -3 und den y-Achsen-Abschnitt 8.

a) Gib die Gleichungen der zu den obigen Geraden gehörenden linearen Funktionen an.

b) Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden.

Lösung:

a) $f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = -3x + 8$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2x+3 &= -3x+8 \\ 5x &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Setzt man diesen x-Wert in eine der Gleichungen ein, ergibt sich: $2 \cdot 1 + 3 = 5$ als y-Wert. Der Schnittpunkt ist also $S(1/5)$

A3. Berechne die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 24$$

Lösung:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 6x - 24 \\ &= x^2 - 2x - 8 \\ x_{1,2} &= -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-8)} \\ &= 1 \pm \sqrt{9} \\ x_1 = -2 \vee \quad x_2 &= 4 \end{aligned}$$

A4. Gib bei den folgenden Funktionsgleichungen an, ob die zugehörige Parabel nach oben oder unten geöffnet ist und ob es sich um eine normale, eine gestauchte oder eine gestreckte handelt.

a)	$f(x) = -3x^2 + 6x$	b)	$f(x) = 0.7x^2 - 1.3x + 2.7$
c)	$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{17}{6}x - \frac{23}{12}$	d)	$f(x) = \frac{13}{13}x^2 + \frac{12}{13}x - \frac{17}{13}$

Lösung:

a) unten, gestreckt
b) oben, gestaucht
c) unten, gestaucht
d) oben, normal

Hilfsmittelteil

Erinnerung an die Operatoren:

Gib an bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.

Bestimme bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen.

Berechne bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.

Begründe bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A5. Eine Autowerkstatt erhählt von einem Zulieferer Glühbirnen in Kartons mit 100 Stück Inhalt. Die Werkstatt will die Lieferung testen und nimmt dazu aus einem Karton (gleichzeitig) zwei Gl—uhbirnen. Nur wenn beide in Ordnung sind, wird die Lieferung akzeptiert.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung akzeptiert wird, obwohl 25 der Glühbirnen defekt sind.

Lösung:

Bei den Ziehungen (auf einen Griff) beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür eine intakte Glühbirne zu ziehen: $p(brennt) = \frac{75}{100}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Birnen in Ordnung sind ist daher:

$$p(beide) = \frac{75}{100} \cdot \frac{75}{100} = \frac{9}{16} \approx 0.56 = 56\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 56% wird die Lieferung akzeptiert, obwohl ein Viertel defekt ist.

A6. An einer Jahrmarktbude wird das folgende Spiel angeboten: Der Spieler muss einen Euro Einsatz zahlen, um spielen zu dürfen. Danach darf er zweimal hintereinander würfeln. Zeigt der Würfel jedesmal die gleiche Augenzahl (Pasch), dann erhält er fünf Euro als Gewinn, ansonsten erhält er nichts.

Berechne, ob das Spiel fair ist.

Lösung:

Für die Bilanz des Spielers ergibt sich:

$$\mu = -1 \cdot \frac{5}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{5}{6} + \frac{4}{6} = -\frac{1}{6}$$

Das Spiel ist nicht fair, weil der Spieler auf lange Sicht bei jedem Spiel $\frac{1}{6}$ Euro verliert.

A7. Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel zu der Funktion:

$$f(x) = x^2 - 0.7x + 1.3$$

und gib begründet an, wieviele Nullstellen diese Funktion haben muss.

Lösung:

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 0.7x \\ &= x(x - 0.7) \\ x = 0 \vee \quad x &= 0.7 \end{aligned}$$

Dazwischen liegt der Wert: $x = 0.35$ als x-Wert des Scheitelpunkts. Setzt man diesen in die Funktion ein, dann ergibt sich:

$$f(0.35) = 1.1775$$

Der Scheitelpunkt hat also die Koordinaten: $S(0.35/1.1775)$

Der Scheitelpunkt dieser nach oben geöffneten Parabel liegt oberhalb der x-Achse. Die Funktion kann daher **keine** Nullstellen haben.

A8. Berechne die Gleichung der quadratischen Funktion, deren Parabel durch die Punkte $A(0/1)$, $B(1/0)$ und $C(3/10)$ geht.

Lösung:

Setzt man die Punkte in die allgemeine Form der quadratischen Funktionsgleichung ein, dann ergibt sich sofort $c = 1$. Mit den beiden anderen Punkten erhält man:

$$\begin{array}{lrl} B & 0 & = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 \\ C & 10 & = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 1 \\[1ex] B & -1 & = a + b \\ C & 9 & = 9a + 3b \\[1ex] B & -1 - a & = b \\ C & 9 & = 9a - 3 - 3a \\[1ex] B & -1 - a & = b \\ C & 2 & = a \\[1ex] B & -3 & = b \\ C & 2 & = a \end{array}$$

Die Funktionsgleichung lautet daher: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

A9. Untersuche rechnerisch, ob die die Gerade zu:

$$g(x) = 3x - 7$$

eine Passante (keine gemeinsamen Punkte), Tangente (ein gemeinsamer Punkt) oder Sekante (zwei gemeinsame Punkte) der Parabel zu

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

ist.

Lösung:

Es ist:

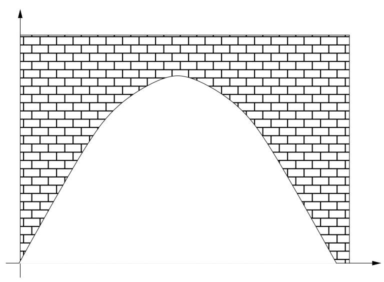
$$\begin{aligned} 3x - 7 &= x^2 - 3x + 2 \\ 0 &= x^2 - 6x + 9 \\ &= (x - 3)^2 \end{aligned}$$

Da hier nur eine Lösung ($x = 3$) vorkommt, muss es sich um eine Tangente handeln.

A10. Der freie Bereich unter einer Brücke kann durch den Graphen der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x$$

dargestellt werden.



Zeichnung **nicht** maßstabsgerecht und eine Einheit steht für einen Meter.

a) Berechne die größte (freie) Höhe unter der Brücke.

b) Ein LKW ist 3m hoch und 2.5m breit. Bestimme, ob dieser LKW unter der Brücke durch passt.

Lösung:

a) Hier muss der Scheitelpunkt bestimmt werden. Es ist:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{3}x^2 + 3x \\ &= x(-\frac{1}{3}x + 3) \end{aligned}$$

Die Nullstellen der Funktion sind also $x = 0$ und $x = 9$. Dazwischen liegt der Wert $x = 4.5$ und weiterhin ist: $f(4.5) = 6.75$

Die freie Höhe beträgt also 6.75m

b) Dazu muss der Abstand der Nullstellen der um 3 'abgesenkten' Brücke berechnet werden: $0 = -\frac{1}{3}x^2 + 3x - 3$ hat die Lösungen: $x_1 \approx 1.14$ und $x_2 \approx 7.85$. Dazwischen liegen $7.85 - 1.14 = 6.71$m. Der LKW passt also problemlos.