O II 2.Klausur 31.3.2003
GK M 10
(CR)

Lösungen als PDF-Datei unter
http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/11/11index.html

A1. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen

a) $\ln(x^2) = 0$ b) $\sin(x-3) = 0,5$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} \ln(x^2) &= 0 \\ x^2 &= e^0 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \sin(x-3) &= 0,5 \\ x-3 &= 0,5236 \\ x &= 3,5236 \end{aligned}$$

A2. Bestimme mit der h-Methode die Steigung der Funktion $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ an der Stelle $x = 1$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{2(1+h)^2-3(1+h)+4-(2-3+4)}{h} \\ &= \frac{2(1+2h+h^2)-3-3h+4-3}{h} \\ &= \frac{2+4h+2h^2-3-3h+4-3}{h} \\ &= \frac{2h^2+h}{h} \\ &= 2h+1 \end{aligned}$$

Der Ausdruck $2h+1$ geht gegen 1, wenn h gegen 0 geht. Daher ist die gesuchte Steigung 1.

A3. Bilde die Ableitungsfunktion der Funktion $f(x) = 3x^2+4x$ und gibt dabei immer die Ableitungsregeln an, die du verwendest.

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2+4x)' & \\ &= (3x^2)' + (4x)' & \text{Summenregel} \\ &= 3(x^2)' + 4(x)' & \text{Faktorregel} \\ &= 3 \cdot 2x + 4 \cdot 1 & \text{Potenzregel} \end{aligned}$$

A4. Bestimme die ersten drei Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$
c) $f(x) = x - \sqrt{x}$ d) $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$

Lösung:

a)
$f'(x) = 6x - 5$
$f''(x) = 6$
$f'''(x) = 0$

b)
$f'(x) = 1 - x^{-2}$
$f''(x) = 2x^{-3}$
$f'''(x) = -6x^{-4}$

c)
$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$f''(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$
$f'''(x) = -\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

d)
$f'(x) = \cos(x) + \sin(x)$
$f''(x) = -\sin(x) + \cos(x)$
$f'''(x) = -\cos(x) - \sin(x)$

A5. Die erste Ableitung einer Funktion gibt an, ob der Funktionsgraph steigt, oder fällt. Die zweite Ableitung gibt daher an, ob die Steigung einer Funktion zunimmt oder abnimmt. Was sagt dieses Zu- oder Abnehmen der Steigung über die ursprüngliche Funktion aus? (Achtung: Mit dieser Aufgabe ist nur ein Punkt holbar!)

Lösung:

Die zweite Ableitung gibt die Krümmung an.

A6. Eine Funktion der Form: $f(x) = ax^2+bx+c$ geht durch die Punkte A(1/3) und B(-1/1). Außerdem hat sie bei $x = 1$ die Steigung 5. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung:

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & 3 \\
1 & -1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & 3 \\
0 & -2 & 0 & -2 \\
0 & -1 & -2 & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & -2 & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -2 & 0
\end{array}$$

Daraus folgt: $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$, also $f(x) = 2x^2 + x$. Benötigt wird für die dritte Zeile des Gleichungssystems, daß $f'(x) = 2ax + b$ ist.

A7. Die beide Parabeln $p_1(x) = x^2 - 2x + 1$ und $p_2(x) = x^2 + 2x + 1$ schneiden sich in einem Punkt.

a) Bestimme den Schnittpunkt der Parabeln.

b) Wie ist die Steigung der Parabeln im Schnittpunkt (zwei Steigungen sind gefragt!)

Lösung:

a) Zur Bestimmung des Schnittpunktes müssen die Parabeln gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x + 1 &= x^2 + 2x + 1 \\
-2x &= 2x \\
0 &= 4x \\
0 &= x
\end{aligned}$$

Da $p_1(0) = p_2(0) = 1$, ist der gesuchte Schnittpunkt $S(0/1)$.

b) Gesucht sind die Ableitungen der Funktionen an der Stelle 0:

$$\begin{aligned}
p_1'(0) &= 2 \cdot 0 - 2 = -2 \\
p_2'(0) &= 2 \cdot 0 + 2 = 2
\end{aligned}$$

O II
GK M 3
(CR)

2.Klausur

28.3.2003

Lösungen als PDF-Datei unter
http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/11/11index.html

A1. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen

a) $e^{(x^2)} = 2$ b) $\cos(x-3) = 0,5$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} e^{(x^2)} &= 2 \\ x^2 &= \ln(2) \\ x &= \pm\sqrt{0,6931} \approx \pm 0,8326 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \cos(x-3) &= 0,5 \\ x-3 &= 1,0472 \\ x &= 4,0472 \end{aligned}$$

A2. Bestimme mit der h-Methode die Steigung der Funktion $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ an der Stelle $x = 2$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{2(2+h)^2-5(2+h)+3-(2\cdot 2^2-5\cdot 2+3)}{h} \\ &= \frac{2(4+4h+h^2)-10-5h+3-1}{h} \\ &= \frac{8+8h+2h^2-10-5h+3-1}{h} \\ &= \frac{2h^2+3h}{h} \\ &= 2h+3 \end{aligned}$$

Der Ausdruck $2h+3$ geht gegen 3, wenn h gegen 0 geht. Daher ist die gesuchte Steigung 3.

A3. Bilde die Ableitungsfunktion der Funktion $f(x) = 4x^2+3x$ und gibt dabei immer die Ableitungsregeln an, die du verwendest.

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^2+3x)' \\ &= (4x^2)' + (3x)' && \text{Summenregel} \\ &= 4(x^2)' + 3(x)' && \text{Faktorregel} \\ &= 4\cdot 2x + 3\cdot 1 && \text{Potenzregel} \end{aligned}$$

A4. Bestimme die ersten drei Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 4x^2 - 6x + 2$ b) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

c) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$ d) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x - 6 \\ f''(x) &= 8 \\ f'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2x^{-3} \\ f''(x) &= 6x^{-4} \\ f'''(x) &= -24x^{-5} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\ f''(x) &= \tfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \\ f'''(x) &= -\tfrac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) - \sin(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) - \cos(x) \\ f'''(x) &= -\cos(x) + \sin(x) \end{aligned}$$

A5. Die erste Ableitung einer Funktion gibt an, ob der Funktionsgraph steigt, oder fällt. Die zweite Ableitung gibt daher an, ob die Steigung einer Funktion zunimmt oder abnimmt. Was sagt dieses Zu- oder Abnehmen der Steigung über die ursprüngliche Funktion aus? (Achtung: Mit dieser Aufgabe ist nur ein Punkt holbar!)

Lösung:

Die zweite Ableitung gibt die Krümmung an.

A6. Eine Funktion der Form: $f(x) = ax^2+bx+c$ geht durch die Punkte A(1/2) und B(-1/2). Außerdem hat sie bei $x = 1$ die Steigung 6. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung:

1	1	1	2
1	−1	1	2
2	1	0	6

1	1	1	2
0	−2	0	0
0	−1	−2	2

1	1	1	2
0	1	0	0
0	−1	−2	2

1	1	1	2
0	1	0	0
0	0	−2	2

1	1	1	2
0	1	0	0
0	0	1	−1

Daraus folgt: $a = 3$, $b = 0$, $c = -1$, also $f(x) = 3x^2 - 1$. Benötigt wird für die dritte Zeile des Gleichungssystems, daß $f'(x) = 2ax + b$ ist.

A7. Die beide Parabeln $p_1(x) = x^2 - 4x + 4$ und $p_2(x) = x^2 + 4x + 4$ schneiden sich in einem Punkt.

a) Bestimme den Schnittpunkt der Parabeln.

b) Wie ist die Steigung der Parabeln im Schnittpunkt (zwei Steigungen sind gefragt!)

Lösung:

a) Zur Bestimmung des Schnittpunktes müssen die Parabeln gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= x^2 + 4x + 4 \\ -4x &= 4x \\ 0 &= 8x \\ 0 &= x \end{aligned}$$

Da $p_1(0) = p_2(0) = 4$, ist der gesuchte Schnittpunkt $S(0/4)$.

b) Gesucht sind die Ableitungen der Funktionen an der Stelle 0:

$$\begin{aligned} p_1'(0) &= 2 \cdot 0 - 4 &= -4 \\ p_2'(0) &= 2 \cdot 0 + 4 &= 4 \end{aligned}$$