O II | 4.Klausur | 13.6.2003
GK M 3
(CR)

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/11/11index.html

A1. Gegeben sei eine Funktion f mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $f(x) = x^4 - x^2$

a) Berechne die erste, zweite und dritte Ableitungsfunktion!

b) Untersuche das Symetrieverhalten der Funktion!

c) Bestimme die Nullstellen der Funktion und ihr Verhalten im Unendlichen!

d) Untersuche die Funktion auf Extremstellen und Wendestellen. Bestimme gegebenfalls die Extrempunkte und die Wendepunkte!

e) Fertige mit Hilfe dieser Ergebnisse eine Skizze des Graphen der Funktion f an.

Lösung:

a) Für die Ableitungsfunktionen gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x^2 \\ f'(x) &= 4x^3 - 2x \\ f''(x) &= 12x^2 - 2 \\ f'''(x) &= 24x \end{aligned}$$

b) Da ausschließlich gerade Exponenten vorkommen, ist die Funktion achsensymmentrisch zur y-Achse.

c) Für die Nullstellen gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 - x^2 \\ &= x^2 \cdot (x^2 - 1) \\ &= x^2(x-1)(x+1) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Für das Verhalten im Unendlichen gilt:

$$f(x) \to +\infty \text{ für } x \to \pm\infty$$

d) Für die Extremstellen gilt die notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$:

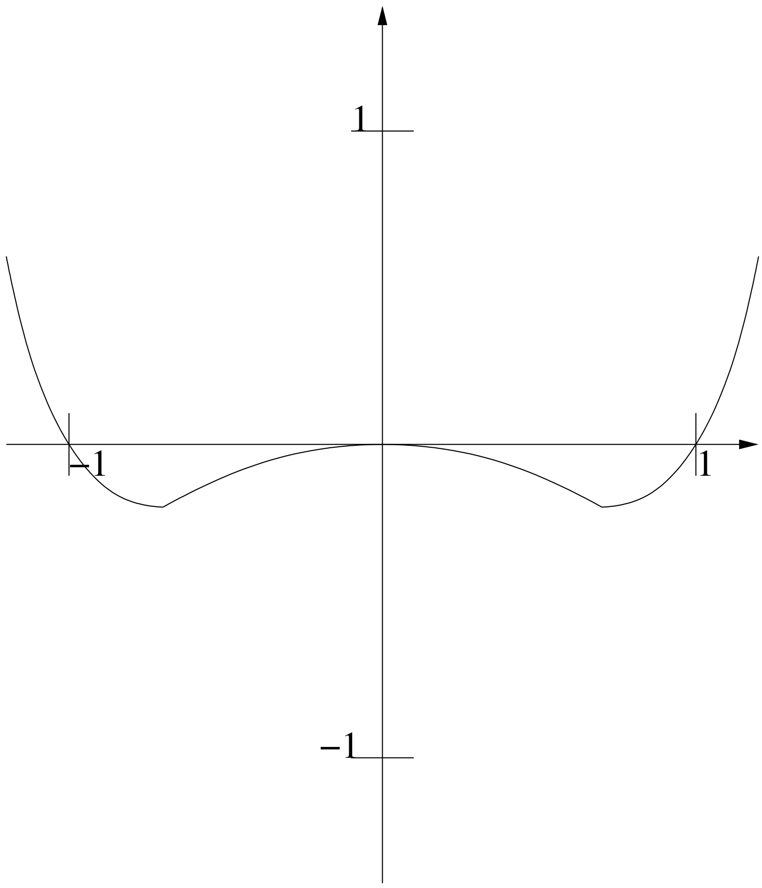
$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 2x \\ &= x^3 - \tfrac{1}{2}x \\ &= x \cdot (x^2 - \tfrac{1}{2}) \\ &= x(x - \sqrt{\tfrac{1}{2}})(x + \sqrt{\tfrac{1}{2}}) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \end{aligned}$$

Für die hinreichende Bedingung gilt: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$:

$$\begin{aligned} f''(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}) = 6 - 2 = 4 &\Rightarrow \text{ Minimum} \\ f''(0) = 0 - 2 = -2 &\Rightarrow \text{ Maximum} \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie liegt auch bei $x = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ein Minimum vor. Die Punkte lauten:

$$T(-\sqrt{\frac{1}{2}}/-\frac{1}{4}), H(0/0), T(\sqrt{\frac{1}{2}}/-\frac{1}{4})$$



e)

A2. Eine Funktion sei durch den folgenden Term beschrieben: $g(x) = ax^3 - 3ax^2$ für $a \in I\!R$ mit $a > 0, I\!D_g = I\!R$. (Hinweis: Der Parameter a wird behandelt, wie eine ganz normale Zahl!)

a) Bestimme die erste und die zweite Ableitung der Funktion $g(x)$!

b) Bestimme die Extremstellen und Extrempunkte der Funktion $g(x)$!

c) Für welches a hat die Funktion $g(x)$ bei $T(2/-4)$ einen Tiefpunkt?

Lösung:

a) Die Ableitungen der Funktion lauten:

$$\begin{aligned} g(x) &= ax^3 - 3ax^2 \\ g'(x) &= 3ax^2 - 6ax \\ g''(x) &= 6ax - 6a \end{aligned}$$

b) Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums lautet: $g'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3ax^2 - 6ax \\ &= x^2 - 2x \\ &= x(x-2) \\ &\Leftrightarrow\ x = 0 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingnung für das Vorliegen eines Extremums lautet: $g'(x) = 0 \wedge g''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} g''(0) &= -6a < 0 \Rightarrow \text{ Maximum} \\ g''(2) &= 6a > 0 \Rightarrow \text{ Minimum} \end{aligned}$$

Die Punkte sind dabei:

$$\begin{aligned} g(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{MAX}(0/0) \\ g(2) = 8a - 3 \cdot a \cdot 4 = -4a \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{MIN}(2/-4a) \end{aligned}$$

c) Mit dem Ergebnis aus b) ergibt sich, daß der Tiefpunkt für $a = 1$ die Koordinaten $(2/-4)$ hat.

A3. Eine Schülerin bei den Bundesjugendspielen erreicht ein recht gutes Ergebnis. Die Bahnkurve der Kugel wird beschrieben durch die Funktion $f(x) = -0,5x^2 + 4$. Man vernachlässige, daß die Kugel in Schulterhöhe abgeworfen wird.

a) Bestimme die Entfernung zwischen Kugelstoßerin und Auftreffpunkt.

b) In welchem Zahlenbereich wird die Funktion hier betrachtet?

c) Wie hoch ist die maximale Höhe, die die Kugel im Flug erreicht hat?

Lösung:

a) Die Entfernung entspricht dem Abstand der Nullstellen:

$$\begin{aligned} 0 &= -0,5x^2 + 4 \\ &= x^2 - 8 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{8} \vee x = \sqrt{8} \end{aligned}$$

Der Abstand ist somit $2 \cdot \sqrt{8} \approx 5,66$. Die Kugelstoßerin hat daher ungefḧr 5,66m weit geworfen.

b) Betrachtet werden die positiven und die negativen x-Werte, sowie die positiven y-Werte.

c) Die Teilaufgabe läßt sich auf zwei verschiedene Arten lösen:

1. Die Dumpfbackenmethode
   Um die maximale Höhe der Kugel zu bestimmen, muß zunächst das Maximum der Funktion bestimmt werden. Die notwendige Bedingung dafür lautet: $f'(x) = 0$

   $$\begin{aligned} 0 &= -x \\ 0 &= x \end{aligned}$$

   Da die zweite Ableitung der Funktion $f''(x) = -1$ ist, liegt bei $x = 0$ ein Maximum vor. Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(0) = 4$. Die Kugel erreichte also eine Höhe von vier Metern.
2. Die Schlaumeiermethode.
   Beim Funktionsgraphen handelt es sich um eine y-achsensymmetrische, nach unten geöffnete Parabel. Diese muß bei $x = 0$ ein Maximum haben. Dessen Wert ist dann auch wieder 4.

O II
GK M 10
(CR)

4.Klausur

17.6.2003

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/11/11index.html

A1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - 9x$

a) Bestimme die ersten drei Ableitungsfunktionen der Funktion.
b) Untersuche das Symmetrieverhalten der Funktion.
c) Wie verhält sich die Funktion im Unendlichen?
d) Bestimme die Nullstellen der Funktion.
e) Bestimme die Extremstellen und -punkte der Funktion.
f) Bestimme die Wendestellen und -punkte der Funktion.
g) Skizziere aufgrund deiner Ergebnisse den Verlauf des Funktionsgraphen.

Lösung:

a) Für die Ableitungsfunktionen gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 9x \\ f'(x) &= 3x^2 - 9 \\ f''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

b) Da die Funktion nur ungerade Exponenten enthält, ist sie punktsymmetrisch zum Ursprung.

c) Für das Verhalten im Unendlichen gilt:
$f(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$

d) Für die Nullstellen gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 9x \\ &= x(x^2 - 9) \\ &= x(x-3)(x+3) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3 \end{aligned}$$

e) Die notwendige Bedingung für das Vorliegen von Extrema ist $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 9 \\ &= x^2 - 3 \\ &= x^2 - \sqrt{3}^2 \\ &= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung lautet: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$:

$$\begin{aligned} f''(\sqrt{3}) &= 6\sqrt{3} > 0 \Rightarrow \text{ Minimum} \\ f''(-\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} \cdot 6 < 0 \Rightarrow \text{ Maximum} \end{aligned}$$

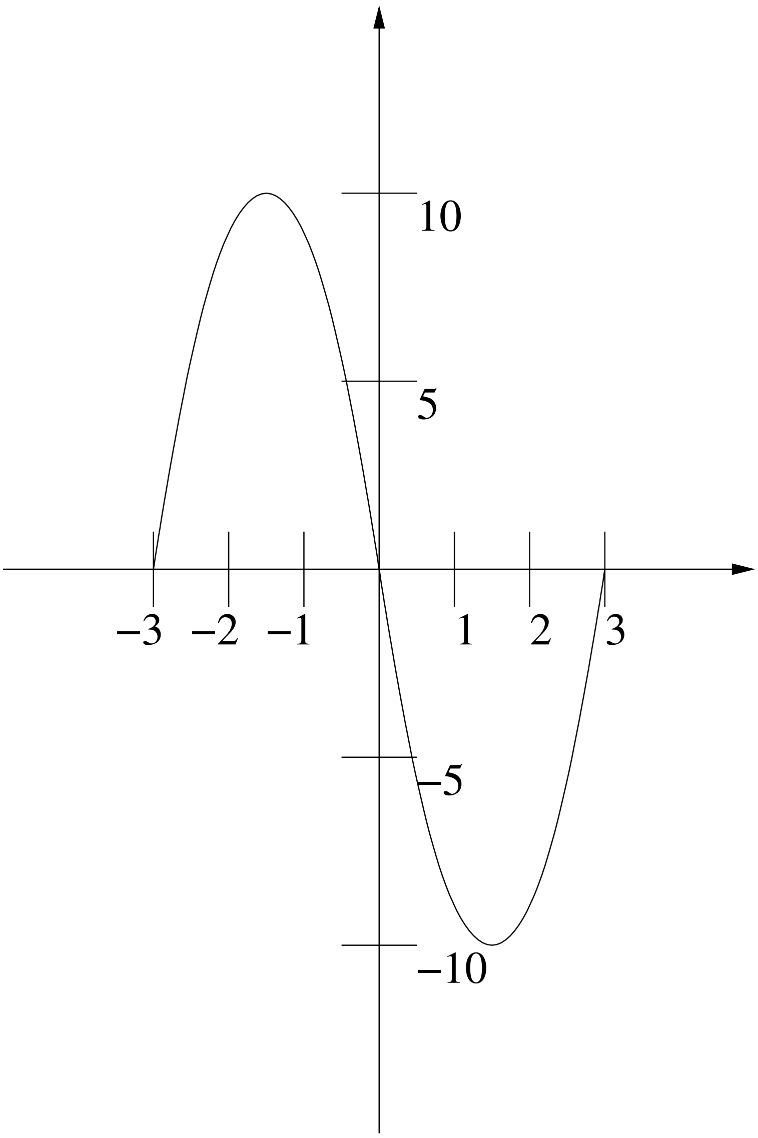
Die Extrempunkte sind dann:

$$\begin{array}{rclclclcl} f(\sqrt{3}) & = & \sqrt{3} \cdot (3-9) & = & -6 \cdot \sqrt{3} & \approx & -10,39 & \Rightarrow & T(\sqrt{3}/-10,39) \\ f(-\sqrt{3}) & = & -\sqrt{3} \cdot (3-9) & = & 6 \cdot \sqrt{3} & \approx & 10,39 & \Rightarrow & H(-\sqrt{3}/10,39) \end{array}$$

f) Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes ist: $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= 6x \\ &= x \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes lautet: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$. Da $f'''(0) = 6$ liegt bei $x = 0$ ein Wendepunkt vor und seine Koordinaten sind $(0/0)$.



g)

A2. Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = x^4 - 2a^2x^2 + a^4$. Dabei ist $a \in I\!R$ und $a > 0$. (Hinweis: Der Parameter a wird in der Rechnung wie eine normale Zahl behandelt)

a) Bestimme die erste und die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$.

b) Bestimme die Extremstellen und die Extrempunkte der Funktion.

c) Für welche Werte von a hat die Funktion an der Stelle $x = 5$ einen Tiefpunkt?

Lösung:

a) Für die Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 2a^2x^2 + a^4 \\ f'(x) &= 4x^3 - 4a^2x \\ f''(x) &= 12x^2 - 4a^2 \end{aligned}$$

b) Die notwendige Bedinung für das Vorliegen eines Extremums ist: $f'(x) = 0$:

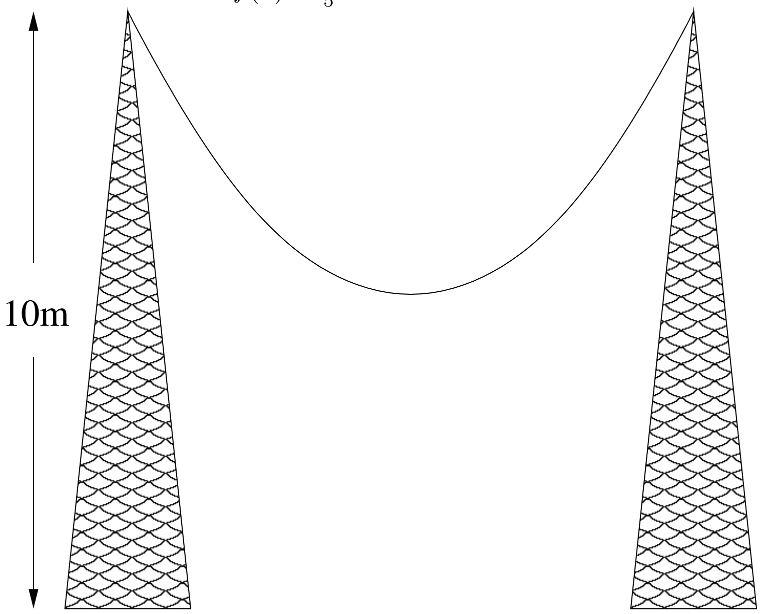
$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 4a^2x \\ &= x^3 - a^2x \\ &= x(x^2 - a^2) \\ &= x(x-a)(x+a) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = a \vee x = -a \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung lautet: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} f''(a) & = & 12a^2 - 4a^2 & = & 8a^2 > 0 & \Rightarrow & \text{Minimum} \\ f''(-a) & = & 12a^2 - 4a^2 & = & 8a^2 > 0 & \Rightarrow & \text{Minimum} \\ f''(0) & = & & & -4a^2 < 0 & \Rightarrow & \text{Maximum} \end{array}$$

c) Da bei $x = a$ und $x = -a$ jeweils ein Minimum liegt, muß gelten: $a = 5$ oder $a = -5$.

A3. Zwischen zwei **zehn Meter** hohen Masten ist ein Seil aufgehängt. Der Verlauf des Seiles entspricht dabei der Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 10$.



a) Wie weit stehen die Masten auseinander? (Hinweis: Nimm den Boden, auf dem die Masten stehen als y-Wert Null an, also die x-Achse. **Was** mußt du dann, anstelle der Nullstellen berechnen?)

b) Wie hoch über dem Boden ist der tiefste Punkt des Seiles?

Lösung:

a) Wegen der Höhe der Masten und wegen des Hinweises muß gelten:

$$\begin{array}{rrcl} & 10 & = & \frac{1}{5}x^2 - 2x + 10 \\ \Leftrightarrow & 50 & = & x^2 - 10x + 50 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & x^2 - 10x \\ \Leftrightarrow & 0 & = & x(x-10) \\ \Leftrightarrow & x = 0 & \vee & x = 10 \end{array}$$

Die Masten stehen also 10m auseinander.

b) Diese Teilaufgabe läßt sich auf zwei verschiedene Arten lösen:

1. Die Dumpfbackenmethode
   Um die minimale Höhe zu bestimmen muß das Minimum der Funktion bestimmt werden. Dazu ist die notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

   $$\begin{array}{rcl} 0 & = & \frac{2}{5}x - 2 \\ 2 & = & \frac{2}{5}x \\ 5 & = & x \end{array}$$

   Da die zweite Ableitung an allen Stellen den Wert $\frac{2}{5}$ hat, muß an der Stelle $x = 5$ ein Minimum vorliegen. Weiterhin ist $f(5) = \frac{1}{5}5^2 - 2 \cdot 5 + 10 = 5$. Die tiefste Stelle ist also in einer Höhe von 5m.
2. Die Schlaujackenlösung
   Da es sich um eine Parabel handelt, muß der Scheitelpunkt und damit der tiefste Punkt zwischen den Nullstellen liegen, also bei $x = 5$.