OII
GK M 5
(CR)

4.Klausur

9.6.2004

Lösungen als PDF-Datei unter
http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/11/11index.html

A1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x$$

a) Welche Aussagen kannst du über die Symmetrie des Funktionsgraphen machen?
b) Wie verhält sich die Funktion im Unendlichen?
c) Bestimme alle Nullstellen der Funktion.
d) Bestimme die ersten drei Ableitungen der Funktion.
e) Berechne alle Extremstellen der Funktion.
f) Berechne alle Wendestellen der Funktion.
g) Skizziere den Verlauf des Funktionsgraphen anhand deiner Ergebnisse.

Lösung:

a) Es ist keine Symmetrie erkennbar.

b) Es gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

sowie

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

c) Offenbar kann man ein x ausklammern, so daß nur noch der 'Rest' faktorisiert werden muß. Hierbei errät man die Nullstelle $x = -1$ und dann folgt die Polynomdivision:

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & -3x^2 & +0x & +4 &) \div (x+1) = x^2 - 4x + 4 \\
x^3 & +x^2 & & & \\
 & -4x^2 & +0x & & \\
 & -4x^2 & -4x & & \\
 & & 4x & +4 & \\
 & & 4x & +4 &
\end{array}$$

Bei dem quadratischen Term, der übrig bleibt handelt es sich offensichtlich um ein Binom und es gilt:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

Somit sind die Nullstellen: $x = 0$, $x = -1$ und die doppelte Nullstelle $x = 2$.

d) Die Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 3x^3 + 4x \\
f'(x) &= 4x^3 - 9x^2 + 4 \\
f''(x) &= 12x^2 - 18x \\
f'''(x) &= 24x - 18
\end{aligned}$$

e) Offenbar liegt bei $x = 2$ ein Extremum vor, weil sich dort eine koppelte Nullstelle befindet. Daher sollte die Polynomdivision erfolgen:

$$\begin{array}{lllll}
(4x^3 & -9x^2 & +0x & +4) & \div(x-2) = 4x^2 - x - 2 \\
4x^3 & -8x^2 & & & \\
 & -x^2 & +0x & & \\
 & -x^2 & 2x & & \\
 & & -2x & 4 & \\
 & & -2x & 4 &
\end{array}$$

Für den verbleibenden, quadratischen Teil ergeben sich die Lösungen: $x \approx -0.59$ und $x \approx 0.83$. Somit ist die notwendige Bedingung für die x-Werte $x = 2$, $x \approx -0.59$ und $x \approx 0.84$ erfüllt. Für die hinreichende Bedingung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f''(2) &= 12 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \\
f''(-0.59) &\approx 14.80 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \\
f''(0.84) &\approx -6.65 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}
\end{aligned}$$

Mit den Funktionswerten ergeben sich damit die folgenden Extrema:

$$f(2) = 0 \Rightarrow TP(2/0)$$
$$f(-0.59) \approx -1.62 \Rightarrow TP(-0.59/01.62)$$
$$f(0.84) \approx 2.08 \Rightarrow HP(0.84/2.08)$$

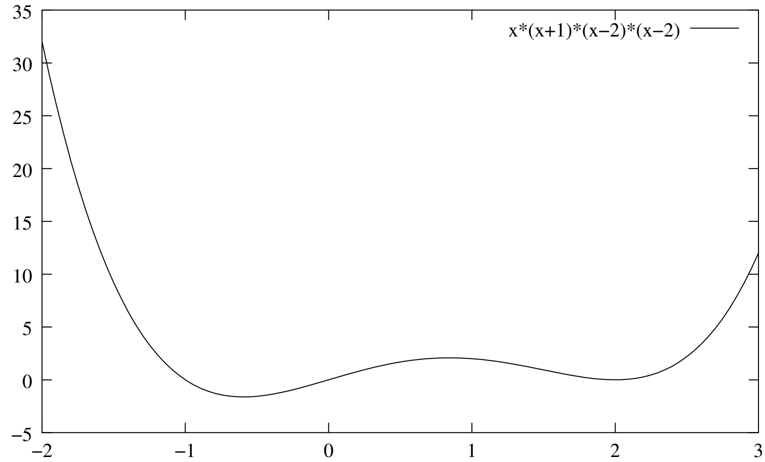
f) Die notwendige Bedingung ist erfüllt für die Nullstellen der zweiten Ableitung. Diese ergeben sich (z.B. mit der p, q-Formel zu: $x = \frac{3}{2}$ und $x = 0$.
Für die hinreichende Bedingung ergibt sich:

$$f'''(\frac{3}{2}) = 18$$
$$f'''(0) = -18$$

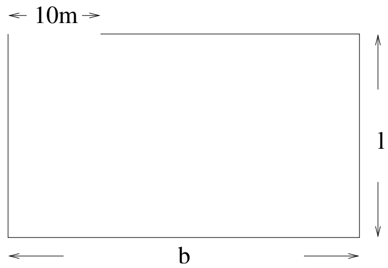
Es liegen also an beiden Stellen Wendestellen vor. Deren y-Koordinaten lauten:

$$f(\frac{3}{2}) \approx 0.94 \Rightarrow WP(\frac{3}{2}/0.94)$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow WP(0/0)$$

g)



A2. Mit einem 50m langen Zaun soll ein rechteckiges Grundstück so eingezäunt werden, daß eine 10m breite Einfahrt (ohne Zaun) übrig bleibt. Wie sind die Länge und die Breite des Grundstücks zu wählen um ein möglichst großes Grundstück zu erhalten. Wie groß ist dieses?



Lösung:
Die Fläche des Grundstücks ist:

$$A(b, l) = b \cdot l$$

Der Gesamtumfang des Grundstücks beträgt die 50m Zaun plus die 10m Einfahrt, also 60m. Daher ergibt sich für den Umfang:

$$2b + 2l = 60$$

Löst man die letzte Gleichung z.B. nach l auf, dann ergibt sich

$$l = 30 - b$$

Dies kann man nun in die Flächengleichung einsetzen und erhält eine Funktion mit einer Variablen für die Fläche:

$$A(b) = b \cdot (30 - b) = 30b - b^2$$

Von dieser Funktion ist das Maximum zu bestimmen. Für die notwendige Bedingung ergibt sich:

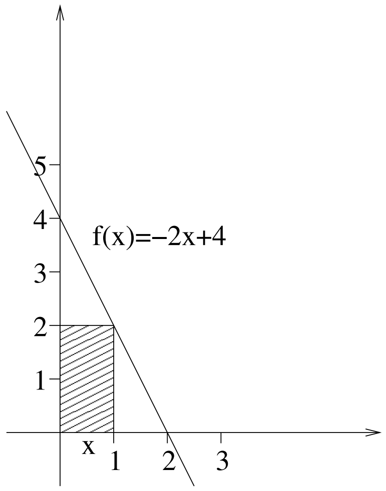
$$\begin{aligned} 0 &= 30 - 2b \\ 2b &= 30 \\ b &= 15 \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist $A''(b) = -2$, so daß auch die hinreichende Bedingung erfüllt ist.
Daher muß die Breite 15m und die Länge ebenfalls 15m betragen. Die Fläche ist dann 225m^2 groß.

A3. Gegeben ist die (Geraden)Funktion

$$f(x) = -2x + 4$$

In dem Dreieck, das aus den Koordinatenachsen und dem Funktionsgraph gebildet wird, soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt eingetragen werden.



Wie lang ist die Grundseite (in der Zeichnung x genannt) zu wählen, damit das Rechteck möglichst groß wird und wie groß ist diese Fläche?

Lösung:

Wenn die Breite des Rechtecks x ist, dann ist seine maximale Höhe $-2x + 4$. Somit ergibt sich die Flächenfunktion

$$A(x) = x \cdot (-2x + 4) = -2x^2 + 4x$$

Für das Maximum muß die Nullstelle der ersten Ableitung bestimmt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= -4x + 4 \\ 4x &= 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Da die zweite Ableitung immer ungleich Null ist, ist auch die hinreichende Bedingung erfüllt. Daher sollte die Breite des Rechtecks eine Einheit betragen. Das Rechteck ist dann 2FE groß.

OII | Nachschreibelausur | 1.7.2004
GK M
(CR)

A1. Löse das folgende Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 5 \\ x & - & 2y & + & 5z & = & 1 \\ 4x & + & 2y & + & 2z & = & 6 \end{array}$$

A2. Führe für die Funktion

$$f(x) = x^3 - 8x^2 - 23x + 30$$

eine Bereichsuntersuchung durch.

A3. Bestimme mit der h-Methode die Steigung der Funktion

$$f(x) = x^2 + x$$

an der Stelle $x = 2$.

A4. Gegeben sein die Funktion aus der ersten Aufgabe ($f(x) = x^3 - 8x^2 - 23x + 30$).

a) Welche Aussagen kannst du bezüglich der Symmetrie machen?
b) Wie verhält sich die Funktion im Unendlichen?
c) Bestimme die ersten drei Ableitungsfunktionen der Funktion. Gib bei der ersten zusätzlich, ausführlich an, welche Ableitungsregeln du verwendest.
d) Berechne alle Extremstellen der Funktion.
e) Berechne alle Wendestellen der Funktion.
f) Skizziere aufgrund deiner Ergebnisse den Verlauf des Funktionsgraphen.