OII | 1.Klausur | 14.10.2004
GK M
(CR)

Lösungen als PDF-Datei unter
http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/11/11index.html

A1. Von einer Gerade ist bekannt, daß sie durch die Punkte $P_1(1/4)$ und $P_2(5/13)$ verläuft. Wie lautet die Geradengleichung?
Lösung:

$$\begin{array}{llcl} I & 4 & = & m+n \\ II & 13 & = & 5m+n \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} I & n & = & 4-m \\ II & 13 & = & 5m+4-m \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} I & n & = & m-4 \\ II & 9 & = & 4m \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} I & n & = & m-4 \\ II & \frac{9}{4} & = & m \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} I & n & = & \frac{9}{4}-4 \\ II & \frac{9}{4} & = & m \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} I & n & = & -\frac{7}{4} \\ II & \frac{9}{4} & = & m \end{array}$$

Die Gleichung der Geraden lautet somit: $y = \frac{9}{4}x - \frac{7}{4}$

A2. Wie lautet die Gleichung der Gerade, die durch den Punkt $P(3/7)$ geht und die senkrecht auf der Geraden $y = 2x + 3$ steht?
Lösung:
Die Steigung der gesuchten Geraden ist der negative Kehrwert der gegebenen Geraden, also $-\frac{1}{2}$. Außerdem geht sie durch den angegebenen Punkt und daher ist:

$$\begin{aligned} 7 &= -\frac{1}{2} \cdot 3 + n \\ 7 &= -\frac{3}{2} + n \\ \frac{17}{2} &= n \end{aligned}$$

Die gesuchte Gleichung lautet daher: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$

A3. Ein Viereck ist festgelegt durch die Punkte $A(1/3)$, $B(4/3)$, $C(4/5)$ und $D(1/7)$. Welchen Flächeninhalt hat dieses Viereck?
Lösung:
Das Viereck läßt sich denken, als aus einem Recheck und einem rechwinkligen Dreieck zusammengesetzt. Die Breite des Rechtecks und die eine Kathete haben die Länge 3, die Höhe des Rechtecks ist 2. Die andere Kathete des Dreiecks ist ebenfalls 2 Längeneinheiten lang. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{Rechteck} \ + \ \text{Dreieck} &= 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 6 + 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Somit hat das Viereck einen Flächeninhalt von 9 Flächeneinheiten.

A4. Bestimme Scheitelpunkt und Nullstellen der folgenden Parabeln

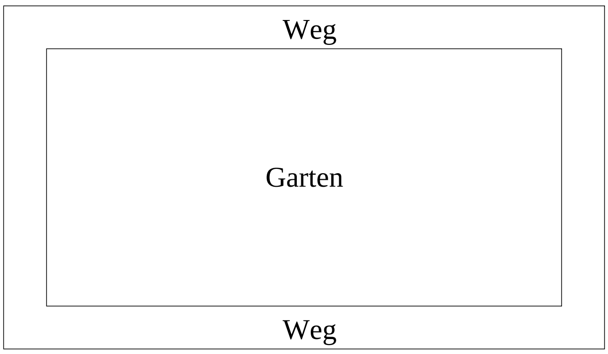
$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 7 \\ \text{b)} & f(x) = 7 + 3x - 5x^2 \end{array}$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\quad f(x) &= -\frac{1}{2}[x^2 - 6x + 14] \\
&= -\frac{1}{2}[x^2 - 6x + 3^2 - 9 + 14] \\
&= -\frac{1}{2}[(x-3)^2 + 5] \\
&= -\frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{5}{2} \qquad \Rightarrow SP(3/-\frac{5}{2}) \\
0 &= (x-3)^2 + 5 \qquad \Rightarrow \text{Keine Nullstellen}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{b)}\quad f(x) &= -5x^2 + 3x + 7 \\
&= -5[x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{7}{5}] \\
&= -5[x^2 - \frac{3}{5}x + (\frac{3}{10})^2 - \frac{9}{100} - \frac{140}{100}] \\
&= -5[(x - \frac{3}{10})^2 - \frac{149}{100}] \\
&= -5(x - \frac{3}{10})^2 + \frac{149}{20} \qquad \Rightarrow SP(\frac{3}{10}/\frac{149}{20}) \\
0 &= (x - \frac{3}{10})^2 - \frac{149}{100} \\
&= (x - \frac{3}{10})^2 - \sqrt{\frac{149}{100}}^2 \\
&= (x - \frac{3}{10} + \sqrt{\frac{149}{100}})(x - \frac{3}{10} - \sqrt{\frac{149}{100}}) \\
x &= \frac{3}{10} - \sqrt{\frac{149}{100}} \approx -0.92 \\
x &= \frac{3}{10} + \sqrt{\frac{149}{100}} \approx 1.52
\end{aligned}
$$

A5. Ein rechteckiger Garten ist 25m lang und 15m breit. Um ihn herum führt ein Weg mit gleichbleibender Breite. Der Weg beansprucht eine Fläche von $84m^2$. Wie breit ist der Weg?



Lösung:
Sei die Breite des Weges x, dann berechnet sich die Fläche zu:

$$2 \cdot 25x + 2 \cdot 15x + 4x^2$$

Dieser Term ist der angegebenen Breite gleich zu setzen und dann zu lösen:

$$
\begin{aligned}
84 &= 4x^2 + 80x \\
0 &= x^2 + 20x - 21 \\
0 &= x^2 + 20x + 10^2 - 100 - 21 \\
0 &= (x+10)^2 - 121 \\
0 &= (x+10)^2 - 11^2 \\
0 &= (x + 10 - 11)(x + 10 + 11) \\
x &= 1 \lor x = -22
\end{aligned}
$$

Da der negative Wert keinen Sinn macht, ist der Weg 1m breit.

A6. Ein Autofahrer, der immer für 50€ tankt, stellt nach einer Benzinpreiserhöhung um 2 Cent fest, daß er nun für seine 50€ einen halben Liter weniger Benzin bekommt. Bereche den alten und den neuen Benzinpreis. (Bemerkung: Bei den Preisen handelt es sich um die Benzinpreise für die Zeit der nächsten Sommerferien.)

Lösung:

Sei l der alte Literpreis des Benzins. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{5000}{l} - \frac{1}{2} &= \frac{5000}{l+2} \\
10000l + 20000 - l^2 - 2l &= 10000l \\
l^2 + 2l - 20000 &= 0 \\
l^2 + 2l + 1^2 - 1 - 20000 &= 0 \\
(l+1)^2 - 20001 &= 0 \\
(l+1)^2 - 141,42^2 &= 0 \\
(l + 1 + 141,42)(l + 1 - 141,42) &= 0 \\
l &= -142,42 \vee l = 140,42
\end{aligned}$$

Da wiederum der negative Wert keinen Sinn ergibt, belief sich der alte Preis auf 1.4042€ .