OII | 2.Klausur | 20.1.2005
GK M
(CR)

Lösungen als PDF-Datei unter
http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/11/11index.html

A1. führe für die folgenden Funktionen eine Bereichsuntersuchung durch.

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ b) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$
c) $f(x) = x^4 - 20x^2 + 64$

Lösung:
a) Man findet leicht die erste Nullstelle bei $x = 1$. Die Polynomdivision hat das folgende Ergebnis:
$$(x^3 + 4x^2 + x - 6) \div (x - 1) = x^2 - 5x + 6$$
Der quadratische Term läßt sich zerlegen in: $(x + 2)(x + 3)$, so daß die vollständige Zerlegung
$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$$
lautet.

b) Man findet leicht die erste Nullstelle bei $x = -1$. Die Polynomdivision hat das folgende Ergebnis:
$$(x^3 + 5x^2 + 7x + 3) \div (x + 1) = x^2 - 4x + 3$$
Der quadratische Term läßt sich zerlegen in: $(x + 1)(x + 3)$, so daß die vollständige Zerlegung
$$f(x) = (x + 1)(x + 1)(x + 3)$$
lautet.

c) Bei dieser Aufgabe gelangt man am schnellsten zum Ziel, wenn man x^2 durch z substituiert. Der Term
$$z^2 - 20z + 64$$
läßt sich zerlegen zu
$$(z - 4)(z - 16)$$
und damit
$$(x^2 - 4)(x^2 - 16) = (x - 2)(x + 2)(x - 4)(x + 4)$$

A2. Gib bei den folgenden Funktionen an, welche Symmetrie du erkennen kannst.

a) $f(x) = x^7 + 13x^5 - 2x^3 + 23x$ b) $f(x) = x^{13} - 23x^5 + 12x^3 - 12x + 2$
c) $f(x) = x^8 + 12x^4 - 13x^2 + 7$

Lösung:
a) Punktsymmetrisch zum Ursprung
b) Keine Symmetrie erkennbar
c) Achsensymmetrisch zur y-Achse

A3. Berechne für jede der folgenden Funktionen den $\lim\limits_{x\to\infty}$ und den $\lim\limits_{x\to-\infty}$.

a) $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 6x + 7$ b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 7$
c) $f(x) = x - 7$

Lösung:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

A4. Berechne

a)	$2^2 \cdot 2^3$	b)	$3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \div 3^1$	c)	$5^{\frac{4}{5}} \cdot 5^{\frac{6}{5}} \div 5$
d)	$\log_2 16$	e)	$\log_3 \sqrt{3}$	f)	$\ln e^{\frac{1}{2}}$

Lösung:

a)	32
b)	1
c)	5
d)	4
e)	$\frac{1}{2}$
f)	$\frac{1}{2}$

A5. Vereinfache soweit, wie möglich

$$\frac{a^2b^3}{x^3y} \cdot \frac{a^{-2}x^2}{b^{-3}y^4} \div \frac{x^2y^4}{a^4b^3}$$

Lösung:

$$a^4 \cdot b^9 \cdot x^{-3} \cdot yy$$

A6. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

a)	$2^{x+1} = 5$	b)	$3^{x-1} = 5^{2x+1}$
c)	$\ln(2x+1) - 2 = 9$	d)	$\lg(x-3) \cdot x + \lg(x-3) = 0$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
& 2^{x+1} = 5 \\
\Leftrightarrow\quad & (x+1)\ln 2 = \ln 5 \\
\Leftrightarrow\quad & x+1 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{\ln 5}{\ln 2} - 1 \approx 1,32 \\
& \mathbb{L} = \{1,32\}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& 3^{x-1} = 5^{2x+1} \\
\Leftrightarrow\quad & (x-1)\lg 3 = (2x+1)\lg 5 \\
\Leftrightarrow\quad & x\lg 3 - \lg 3 = 2\lg 5x + \lg 5 \\
\Leftrightarrow\quad & x\lg 3 - 2x\lg 5 = \lg 5 + \lg 3 \\
\Leftrightarrow\quad & x(\lg 3 - 2\lg 5) = \lg 5 + \lg 3 \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{\lg 5 + \lg 3}{\lg 3 - 2\lg 5} \approx -1,28 \\
& \mathbb{L} = \{-1,28\}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
& \ln(2x+1) - 2 = 9 \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(2x+1) = 11 \\
\Leftrightarrow\quad & 2x+1 = e^{11} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{e^{11}-1}{2} \approx 29936,57 \\
& \mathbb{L} = \{29936,57\}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
& \lg(x-3)\cdot x + \lg(x-3) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \lg(x-3)(x+1) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \lg(x-3) = 0 \vee x+1 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x-3 = 1 \vee x = -1 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 4 \vee x = -1 \\
& \mathbb{L} = \{4\}
\end{aligned}$$