OII GK M (CR) — 3.Klausur — 17.3.2005

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/11/11index.html

A1. Bestimme die Ableitungsfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Lösung:

Die Funktion kann nicht mit den Ableitungsregeln abgeleitet werden. Es muß daher die h-Methode verwendet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1}}{h} \\
&= \frac{\frac{x+1}{(x+h+1)(x+1)} - \frac{x+h+1}{(x+h+1)(x+1)}}{h} \\
&= \frac{\frac{x+1-(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h} \\
&= \frac{\frac{-h}{x^2+x+hx+h+x+1}}{h} \\
&= \frac{-h}{h(x^2+x+hx+h+x+1)} \\
&= \frac{-1}{x^2+x+hx+h+x+1}
\end{aligned}$$

Und dann ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2+x+hx+h+x+1} = \frac{-1}{x^2+x+1}$$

A2. Bestimme jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen

a)	$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$	b)	$f(x) = \frac{1}{x} + 2x$	c)	$f(x) = \sqrt{x} - 2x^2$
d)	$f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}$	e)	$f(x) = 3x^2 + \sin(x)$	f)	$f(x) = \cos(x) - \ln(x)$

Lösung:

Es ist:

a) $f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 10x + 3$

b) $f'(x) = -x^{-2} + 2$

c) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4x$

d) $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

e) $f'(x) = 6x + \cos(x)$

f) $f'(x) = -\sin(x) - \frac{1}{x}$

A3. Bestimme jeweils die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

a)	$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 7$	b)	$f(x) = x^{-3}$	c)	$f(x) = 2x + 1$

Lösung:

Es ist:

a) $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 10x - 3$
$f''(x) = 26x^2 - 12x + 10$
$f'''(x) = 52x - 12$

b) $f'(x) = -3x^{-4}$
$f''(x) = 12x^{-5}$
$f'''(x) = -60x^{-6}$

c) $f'(x) = 2$
$f''(x) = 0$
$f'''(x) = 0$

A4. Untersuche, ob und an welchen Stellen die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$ Extremstellen hat. Ermittle auch die dazu gehörigen Hoch- und Tiefpunkte.

Lösung:
Die erste Ableitung der Funktion lautet: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 13$. Die notwendige Bedingung ist: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= 3x^2 - 6x - 13 \\
&= x^2 - 2x - \frac{13}{3} \\
&= x^2 - 2x + 1 - 1 - \frac{13}{3} \\
&= (x-1)^2 - \frac{16}{3} \\
&= (x - 1 + \sqrt{\frac{16}{3}})(x - 1 - \sqrt{\frac{16}{3}}) \\
x &= 1 \pm \sqrt{\frac{16}{3}} \\
x \approx 3,31 &\vee x \approx -1,31
\end{aligned}$$

Hinreichend für das Vorliegen einer Extremstelle ist $f'(x) = 0$ und ein Vorzeichenwechsel an dieser Stelle. Es gilt aber:

$$\begin{aligned}
f'(-2) &= 11 \\
f'(0) &= -13 \\
f'(4) &= 11
\end{aligned}$$

So daß an beiden Stellen ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Bei $x = -1,31$ liegt ein Maximum vor $(+ \to -)$ und bei $x = 3,31$ ein Minimum $(- \to +)$. Weiterhin ist:

$$\begin{aligned}
f(1 + \sqrt{\frac{16}{3}}) &= -24,63 \\
f(1 - \sqrt{\frac{16}{3}}) &= 24,63
\end{aligned}$$

Und damit ist: $HP(-1,31/24,63)$ und $TP(3,31/-24,63)$

A5. Die erste Ableitungsfunktion gibt die Steigung der ursprünglichen Funktion an. Man kann auch sagen, daß sie die Änderung des Funktionswertes der ursprünglichen Funktion angibt. Ist z.B. $f'(x) > 0$, dann heißt das, daß die Funktionswerte von links nach rechts zunehmen.
Welche Bedeutung hat die zweite Ableitung in Bezug auf die ursprüngliche Funktion? Überlege dazu, wie es sich auf die ursprüngliche Funktion auswirkt, wenn die Steigung (erste Abl.) zu- oder abnimmt.
Lösung:
Die 2. Ableitung gibt die Krümmung der ursprünglichen Funktion an.