OII
GK M
(CR)

4.Klausur

11.5.2005

Lösungen als PDF-Datei unter
http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/11/11index.html

A1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

a) Welche Aussage kannst du über die Symmetrie des Funktionsgraphen machen?
b) Wie verhält sich der Graph der Funktion im Unendlichen?
c) Welche Nullstellen hat die Funktion?
d) Bestimme die ersten drei Ableitungen der Funktion.
f) Welche Extremstellen hat die Funktion?
g) Welche Wendestellen hat die Funktion?
h) Skizziere aufgrund deiner Berechnungen den Graph der Funktion.

Lösung:

a) Es ist keine Symmetrie erkennbar.
b) Es gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} = \infty$$

c) Die Nullstellen sind: $x = -1$, $x = 1$ und $x = 3$.
d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 1 \\ f''(x) &= 6x - 6 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

e) Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums ist:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 6x - 1 &= 0 \\ x^2 - 2x - \frac{1}{3} &= 0 \\ x_1 &= 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx -0,15 \\ x_2 &= 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 2,15 \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Extremums ist:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0 \\ f''(-0,15) = -4\sqrt{3} < 0 \\ f''(2,15) = 4\sqrt{3} > 0 \end{aligned}$$

Da weiterhin die Funktionswerte $f(-0,15) \approx 3,08$ und $f(2,15) \approx -3,08$, hat die Funktion die Extrema:

$$HP(-0,15/3,08) \quad TP(2,15/-3,08)$$

f) Notwendig für das Vorliegen eines Wendepunktes ist:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x - 6 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Hinreichend ist:

$$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

Da aber $f'''(x) = 6$ folgt automatisch, daß die Funktion bei $WP(1/0)$ einen Wendepunkt hat.

g) Der Graph sieht wirklich **schön** aus.

A2. Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3ten Grades hat an der Stelle $x = -1$ eine Nullstelle. Er schneidet die y-Achse beim Wert 2 und berührt die x-Achse an der Stelle $x = 2$. Wie lautet die Funktionsgleichung?
Lösung:
Das Gleichungssystem hat das folgende Aussehen:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0 \\ f(0) &= 2 \\ f(2) &= 0 \\ f'(2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a+b-c+d &= 0 \\ d &= 2 \\ 8a+4b+2c+d &= 0 \\ 12a+4b+c &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{3}{2} \\ c &= 0 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautat daher: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

A3. Bei einer Zirkusvorführung wird ein Artist unter einem Winkel von 45° aus einer "Kanone" abgeschossen und landet 15m weiter in einem Wasserbehälter, der gegenüber der Kanonenöffnung 3,75m höher steht. Kann die Vorführung in einem 6m hohen Saal stattfinden? (Hilfe: Die Flugkurve ist eine Parabel)
Lösung:
Auch hier muß zunächst die Gleichung der Funktion bestimmt werden. Nimmt man die Mündung der "Kanone" als Ursprung des Koordinatensystems, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f(15) &= 3,75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= 0 \\ b &= 1 \\ 225a + 15 &= 3,75 \end{aligned}$$

Damit ist der Funktionsgraph $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + x$. Für diese Funktion ist nun das Maximum gesucht. Es ist die notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -\frac{1}{10}x + 1 &= 0 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist sowieso immer $-\frac{1}{10}$ und daher liegt bei $x = 10$ ein Maximum vor. Der Funktionswert ist:

$$f(10) = -\frac{1}{20} \cdot 100 + 10 = 15$$

Der Artist sollte sich das in einer solch niedrigen Halle **sehr** gut überlegen.