Jgst. 11/I 1.Klausur 25.9.2008

A1.

a) Eine Gerade geht durch den Punkt $A(1/2)$ und hat die Steigung $m = 3$. Bestimme die Gleichung der Geraden.

b) Bestimme die Gleichung der Geraden durch die Punkte $A(1/2)$ und $B(5/3)$.

c) Gegeben ist eine Gerade durch die Gleichung

$$3x - 2y = 7 + x$$

Bestimme die Steigung der Geraden und einen Punkt, der auf der Geraden liegt.

Lösung:

a) Setzt man den Punkt A in die *vorläufige* Gleichung $y = 3x + n$ ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} 2 &= 3 \cdot 1 + n \\ -1 &= n \end{aligned}$$

und damit: $y = 3x - 1$

b) Setzt man die beiden Punkte in die Normalform der Geradengleichung ein, erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccc} I & 2 & = & m + n \\ II & 3 & = & 5m + n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} I & n & = & 2 - m \\ II & 3 & = & 5m + 2 - m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} I & n & = & 2 - m \\ II & 1 & = & 4m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} I & n & = & 2 - m \\ II & \frac{1}{4} & = & m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} I & n & = & \frac{7}{4} \\ II & m & = & \frac{1}{4} \end{array}$$

Und damit ist dann: $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

c) Zunächst muss die Gleichung in die Normalform gebracht werden:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 7 + x \\ -2y &= -2x + 7 \\ y &= x + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Die Steigung kann nun abgelesen werden und sie beträgt $m = 1$. Setzt man nun einen beliebigen Wert für x ein, erhält man den zugehörigen y-Wert: Für $x = 0$ ergibt sich $y = \frac{7}{2}$. Der zugehörige Punkt ist dann: $P(0/\frac{7}{2})$.

A2.

a) Wie groß ist der Schnittwinkel zwischen den Geraden g_1 und g_2, die gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} g_1 &: y = 2x + 3 \\ g_2 &: y = -\frac{1}{3}x - 3 \end{aligned}$$

b) Gegeben ist ein Dreieck durch die Eckpunkte: $A(1/3)$, $B(1/5)$ und $C(4/3)$. Bestimme alle Innenwinkel des Dreiecks.

Lösung:

a) Der Steigungswinkel der ersten Geraden beträgt:

$$\alpha = \arctan(2) = 63.43°$$

Für die zweite Gerade ergibt sich:

$$\beta = \arctan(-\frac{1}{3}) = 18.43°$$

Der Schnittwinkel beträgt demnach: $63.43 + 18.43 = 81.86°$

b) Offenbar handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei A. Somit ist der (negative) Steigungswinkel der Gerade durch B und C gleich einem der Innenwinkel:

$$m = \frac{3-5}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

Damit ist dieser Winkel: $\gamma = \arctan(-\frac{2}{3}) = 33.69°$. Der fehlende Winkel kann mit dem Innenwinkelsatz berechnet werden: $\beta = 180 - 90 - 33.69 = 56.31°$

A3. Gegeben sind die drei Punkte $A(1/2)$, $B(2/5)$ und $C(6/-1)$. Wie weit ist der Punkt C von der Geraden entfernt, die durch A und B geht?
Anmerkung: Die Entfernung wird immer rechtwinklig gemessen. Bewertet wird nicht alleine die reine Rechnung, sondern auch die Beschreibung des Lösungsweges.
Lösung:
Zunächst muss die Gleichung der Geraden durch A und B bestimmt werden:

$$\begin{array}{ccc c}
I & 2 & = & m+n \\
II & 5 & = & 2m+n
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc c}
I & n & = & 2-m \\
II & 5 & = & 2m+2-m
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc c}
I & n & = & -1 \\
II & m & = & 3
\end{array}$$

Die Gleichung lautet also: $y = 3x - 1$.
Nun muss die Gleichung einer Geraden gefunden werden, die durch C geht und senkrecht auf der Geraden AB steht.
Die Steigung ist dabei: $m = -\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
-1 &= -\frac{1}{3} \cdot 6 + n \\
-1 &= -2 + n \\
n &= 1
\end{aligned}$$

Nachdem nun die Gleichung $y = -\frac{1}{3}x+1$ bekannt ist, muss der Schnittpunkt dieser beiden Geraden gefunden werden:

$$\begin{aligned}
3x - 1 &= -\frac{1}{3}x + 1 \\
9x - 3 &= -x + 3 \\
10x &= 6 \\
x &= \frac{6}{10} = 0.6
\end{aligned}$$

Der zugehörige y-Wert ist: $y = 3 \cdot 0.6 - 1 = 0.8$, und damit der Punkt $(0.6/0.8)$.
Abschließend muss der Abstand des Punktes C vom gerade berechneten Punkt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{(0.6-6)^2 + (0.8-(-1))^2} \\
d &= \sqrt{29.16 + 3.24} \\
d &= \sqrt{32.4} \approx 5.69 \text{ LE}
\end{aligned}$$