Jgst. 11/II 1.Klausur 6.3.2008

A1. Von verschiedenen Wetterstationen einer Region werden zu einem Zeitpunkt die folgenden Temperaturen gemeldet:

6.2; 5.3; 4.5; 6.5; 5.7; 6.2; 7.1; 7.2; 4.9; 4.8; 5.3; 6.4; 5.6; 4.9; 7.4; 7.5; 6.2

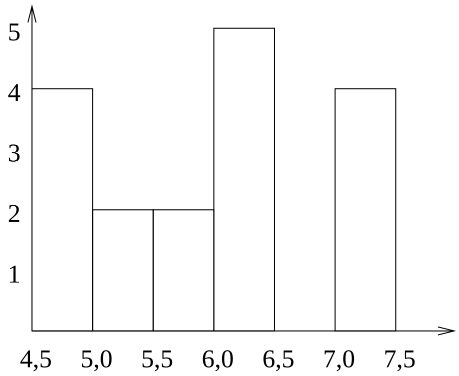
a) Gib die folgenden Werte an: Höchste Temperatur, niedrigste Temperatur, Durchschnittstemperatur, Mediantemperatur, der gemeldeten Temperaturen.

b) Zeichne ein Balkendiagramm, bei dem die Temperaturen in Klassen von 0.5 Grad eingeteilt eingetragen werden (Also alle Temperaturen von 4.5 bis 5.0 in einem Balken, die von 5.0 bis 5.5 in einem Balken, usw.)

c) Aus der Teilaufgabe b) ergeben sich für die Temperaturklassen ja auch relative Häufigkeiten. Berechne mit diesen Häufigkeiten nochmals die Durchschnittstemperatur. Verwende als Temperaturwert dabei immer die Klassenmitte (z.B. 4.75 für die Klasse von 4.5 bis 5.0).

Lösung:

a) Min: 4.5; Max: 7.5; $\bar{x} = 5.98$; $\tilde{x} = 6.2$



b)

c)

$$\frac{4}{17}4.75 + \frac{2}{17}5.25 + \frac{2}{17}5.75 + \frac{5}{17}6.25 + \frac{4}{17}7.25 = 5.955$$

A2. Zwei Sportlerinnen müssen bei einem Sportwettkampf zu einem 'Stechen' antreten. Sie erreichen die folgenden Punktzahlen:

Sportlerin A	53	45	61	58	55
Sportlerin B	55	58	52	51	55

Welche Sportlerin hat gewonnen und welche hat einen konstantere Leistung erbracht?

Lösung:

Um die Siegerin zu ermitteln kann die Punktsumme oder der Punktdurchschnitt verwendet werden. Die Sportlerin A hat 272 Punkte, die Sportlerin B 271 Punkte. Die Sportlerin A hat also knapp gewonnen.

Um die Konstanz der Sportler zu ermitteln, müssen die Varianzen der Daten ermittelt werden. Es ergibt sich für die Sportlerin A:

$$\frac{1}{5}[(53 - 54.4)^2 + \ldots + (55 - 54.4)^2] = 29.44$$

Bei der Sportlerin B ergibt sich:

$$\frac{1}{5}[(55 - 54.2)^2 + \ldots + (55 - 54.2)^2] = 6.16$$

Die Sportlerin B war also deutlich konstanter als Sportlerin A.

A3. In zwei parallelen Klassen wurden Klassenarbeiten geschrieben. Die Ergebnisspiegel sind:

	1	2	3	4	5	6
Klasse 1	3	4	6	10	4	2

	1	2	3	4	5	6
Klasse 2	2	3	8	12	3	1

a) Berechne für beide Klassen die Durchschnittsnote.

b) In welchem Sinne kann es gemeint sein, wenn der Lehrer in beiden Fällen davon spricht, dass die Arbeit *durchschnittlich* ausgefallen sei?

c) Berechne für beide Klassen die Varianz und die Standardabweichung. Verwende als Mittelwert 3.48. Welche Klasse hat die konstantere Leistung gezeigt?

d) In welchem Intervall müssten 69% der Klassenarbeiten der ersten Klasse liegen?

Lösung:

a) Klasse 1:

$$(1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2)/29 = 3.48$$

Klasse 2:

$$(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1)/29 = 3.48$$

b) Der Durchschnitt aller Noten ist:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 3.5$$

Insofern sind die beiden Arbeiten durchaus *durchschnittlich* ausgefallen.

c) Für die erste Klasse ergibt sich:

$$V = \frac{1}{29}(3(1 - 3.48)^2 + 4(2 - 3.48)^2 + \ldots 2(6 - 3.48)^2) = 1.84$$

und damit

$$s = \sqrt{1.84} = 1.35$$

Für die zweite Klasse ergibt sich

$$V = \frac{1}{29}(2(1 - 3.48)^2 + \ldots 1(6 - 3.48)^2) = 1.28$$

und damit

$$s = \sqrt{1.28} = 1.13$$

Die zweite Klasse hat konstantere Leistungen gezeigt.

d) Die Intervallgrenzen sind:

$$3.48 - 1.35 = 2.13 \quad 3.48 + 1.35 = 4.83$$

Das Intervall wäre also: $[2.13; 4.83]$

A4. Eine Baumarktkette vergleicht die Einwohnerzahl (in Tausend) in einzelnen Landkreisen mit der Zahl ihrer registrierten Kunden (ebenfalls in Tausend).

Landkreis	1	2	3	4	5	6	7
Einwohner	60	82	74	96	56	79	86
Kunden	2	3	5	2	3	4	5

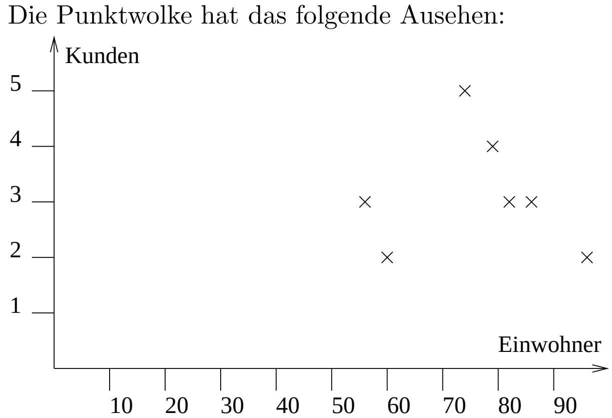
a) Zeichne zu den obigen Daten eine Punktwolke und berechne ihren Mittelpunkt.

b) Wie stehst du zu der Aussage: '*Je größer der Landkreis, desto größer die Kundenanzahl*'. Belege deine Meinung mit einer angemessenen statistischen Kennzahl.

c) Offenbar fallen die Landkreise 1 und 5 aus dem Rahmen. Streiche diese beiden Landkreise und berechne für die verbleibenden Landkreise eine Regressionsgerade.

Lösung:

a) Die Punktwolke hat das folgende Ausehen:



Der Mittelwert der x-Werte ist:

$$\frac{1}{7}(60 + 82 + 74 + 96 + 56 + 79 + 86) = 76.14$$

der der y-Werte ist:

$$\frac{1}{7}(2+3+5+2+3+4+5) = 3.43$$

Der Mittelpunkt der Punktwolke hat daher die Koordinaten (76.14/3.43).

b) Gefragt ist die Kovarianz der Daten. Diese berechnet sich zu:

$$[(60-76.14)(2-3.43)+(82-76.14)(3-3.43)+\ldots+(86-76.14)(5-3.43)] = 2.08$$

Offenbar stimmt die Behauptung, da die Kovarianz positiv ist.

c) Zunächst muss wieder der Mittelpunkt der veränderten Punktwolke berechnet werden. Dieser ist

$$(83.4/3.8)$$

Weiterhin werden die Kovarianz und die Varianz der x-Werte benötigt.

$$c_{xy} = \frac{1}{5}[(82-83.4)(3-3.8)+\ldots+(86-83.4)(5-3.8)] = -6.12$$

$$V_x = \frac{1}{5}[(82-83.4)^2+\ldots+(86-83.4)^2] = 55.04$$

Die Gleichung der Regessionsgeraden ist daher:

$$y = -0.1112(x-83.4)+3.8$$

A5. Bestimme mit geeigneten Methoden die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + x - 6$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$

Lösung:

a) $x_1 = 2, x_2 = -3,$ quadratische Ergänzung
b) $x_1 = 2, x_2 = -4, x_3 = 5,$ Polynomdivision und quadr. Ergänzung

A6. Bei der folgenden Funktion steht t für eine beliebige reelle Zahl. Berechne die Nullstellen dieser Funktion:

$$f(x) = x^2 - (2+t)x + 2t$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x^2-(2+t)x+2t &= x^2-(2+t)x+\left(\frac{2+t}{2}\right)^2 - \frac{4+4t+t^2}{4} + \frac{8t}{4} \\ &= \left(x-\frac{2+t}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-t}{2}\right)^2 \\ &= (x-2)(x-t) \end{aligned}$$

Die Funktion hat also die Nullstellen $x = 2$ und $x = t$.

A1. In einer Klasse werden die Körpergrößen gemessen:

1.75; 1.68; 1.83; 1.77; 1.95; 1.81; 1.67; 1.71;

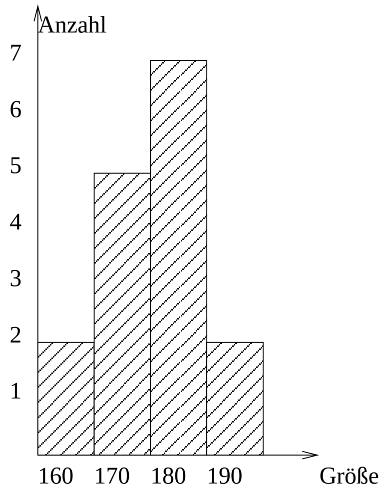
1.88; 1.72; 1.83; 1.81; 1.74; 1.88; 1.89; 1.93

a) Bestimme die größte, die kleineste, die durchschnittliche Körpergröße und die Mediangröße.
b) Ordne die Körpergrößen in Klassen der Breite 10cm ein ($1.60-1.69, 1.70-1.79, \ldots$) und zeichne für diese Klassen ein Balkendiagramm.
c) Aus der Teilaufgabe b) ergeben sich auch relative Häufigkeiten. Berechne mit diesen rel. Häufigkeiten nochmals die durchschnittliche Körpergröße. Verwende als Körpergröße dabei immer die Mitte der Klasse ($1.65, 1.75, \ldots$)

Lösung:

a) Kleinste Größe: 1.67; Größte Größe: 1,95; Durchscnittsgröße: 1.80; Median: 1.81.

b)



c)

$$\frac{1}{16}(2 \cdot 1.65 + 5 \cdot 1.75 + 7 \cdot 1.85 + 2 \cdot 1.95) = 1.8063$$

A2. Bei zwei Tankstellen werden über einen gewissen Zeitraum hin die Benzinpreise ermittelt. Es ergaben sich folgende Werte:

Shnell	1.10	1.12	1.20	1.23	1.11	1.20	1.17	1.19	1.20
Fesso	1,15	1,18	1,20	1,14	1,13	1,19	1,20	1,17	1,16

a) Berechne für beide Tankstellen den durchschnittlichen Bezinpreis.
b) Berechne für beide Tankstellen die Varianz und die Standardabweichen. Verwende als Mittelwert in beiden Fällen die 1.17 € . Beantworte dann die Frage, bei welcher Tankstelle die Benzinpreise mehr schwankten.
c) In welchem Intervall müssten 69% aller Benzinpreise bei der Firma Fesso liegen?

Lösung:

a) Der Durchschnittspreis ist bei beiden Tankstellen 1.6889 € .
b) Die Varianz bei Shnell ist 0.00197 und damit die Standardabweichung 0.04435.
Bei Fesso war die Varianz 0.00059 und die Standardabweichung 0.02427
Bei Shnell war die Schwankung nahezu doppelt so groß.
c) Bei Fesso müssten 69

$$[1.17 - 0.024, 1,17 + 0.024] = [1.145, 1.194]$$

liegen.

A3. Eine Krankenversicherung will untersuchen, wie sich das Rauchen auf die Versicherungsleistungen auswirkt. Sie fordert dazu ihre Vertretungen auf, Statistiken zu liefern, aus denen die durchschnittliche Anzahl von Zigaretten pro Tag, den durchschnittlichen Versicherungsleistungen pro Jahr gegenüberstellt. Die Daten werden verdichtet (=Mittelwerte werden berechnet) und der Konzernzentrale zur Verfügung gestellt. Die Erhebung ergibt für sieben ausgewählte Vertretungen:

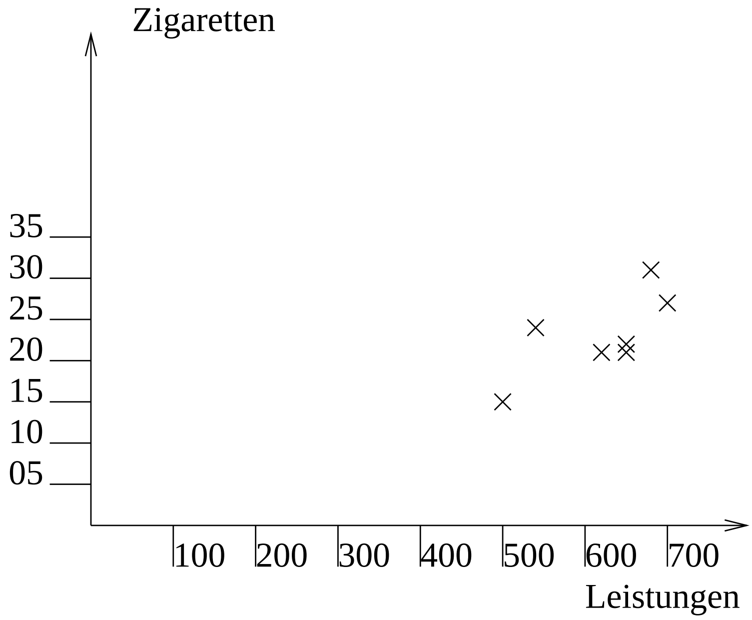
Vertretung	A	B	C	D	E	F	G
Zigarettenkonsum	21	24	31	15	21	22	27
Versicherungsleistung	656	547	678	499	619	646	702

a) Zeichne die Punktwolke, welche die obigen Daten graphisch darstellt und berechne den Mittelpunkt der Wolke.

b) Wie beurteilst du die Aussage: '*Je mehr Zigaretten pro Tag, desto höher die Versicherungsleistung.*' Belege deine Aussage mit einer statistischen Kennzahl.

c) Bestimme die Gleichung der Regressionsgeraden zu der obigen Punktwolke.

Lösung:



a)

Der Mittelpunkt berechnet sich zu:

$$\bar{x} = 23, \quad \bar{y} = 621$$

b) Gefragt wird nach der Kovarianz der Werte. Dieser berechnet sich zu

$$\frac{1}{7}[(21-23)(656-621) + \ldots + (27-23)(702-621)] = 227.29$$

Die Aussage scheint zuzutreffen.

c) Hierzu wird außerdem noch die Varianz der x-Werte gebraucht. Diese ist:

$$\frac{1}{7}[(21-23)^2 + \ldots + (27-23)^2] = 22$$

Die Steigung der Regressionsgeraden ist dann $a = 227.29 \div 22 \approx 10.33$.
Die Gleichung der Regressionsgeraden ist dann

$$y = 10.33(x-23) + 621$$

A4. Bestimme mit geeigneten Verfahren die Nullstellen der folgenden Funktionen:

$$\text{a)} \quad f(x) = x^2 + 2x - 35 \qquad \text{b)} \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 28x + 60$$

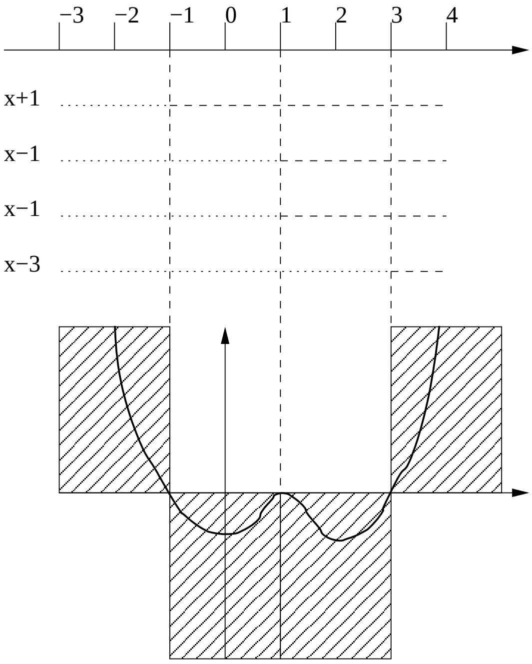
Lösung:

Mit z.B. quadratischer Ergänzung: $x = 5 \vee x = -7$.
Raten von $x = 2$
Polynomdivision (ergibt: $(x-2)(x^2 - x - 30)$)
Quadratische Ergänzung: $x = -5 \vee x = 6$

A5. Bestimme mit einer Bereichsuntersuchung den ungefähren Verlauf der Funktion:

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-1)(x-3)$$

Lösung:



A6. Mache eine Aussage über das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^6 - 12x^2 + 3$ b) $f(x) = x^5 - 17x^3 + 12x - 3$ c) $f(x) = x^7 - 3x^3 + 22x$

Lösung:

a) Achsensymmetrisch zur y-Achse

b) Keine Symmetrie erkennbar

c) Punktsymmetrisch zum Ursprung

A7. Bestimme das Verhalten der folgenden Funktionen im Unendlichen:

a) $f(x) = -2x^6 + 3x^5 + 2x^2 - 3x + 12$ b) $f(x) = x^7 - 3x^3 + 12x^2 - 5x + 1$

Lösung:

a)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

A8. Bestimme die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^2 - t^2$$

Lösung:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - t^2 \\ &= (x+t)(x-t) \end{aligned}$$

$$x = t \vee x = -t$$