Jgst. 11/I 1.Klausur 29.10.2009

A1. Berechne den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der beiden Geraden, die durch die folgenden Gleichungen gegeben sind:

$$g : 3x - 5y = 2 \qquad h : 2x = 7y - 3$$

Lösung:
Zunächst müssen die beiden Gleichungen in Normalform gebracht werden:

$$\begin{aligned} g: \quad 3x - 5y &= 2 \\ -5y &= -3x + 2 \\ y &= \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h: \quad 2x &= 7y - 3 \\ 2x + 3 &= 7y \\ y &= \frac{2}{7}x + \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Nun müssen die beiden Gleichungen gleich gesetzt werden, um den Schnittpunkt zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} &= \frac{2}{7}x + \frac{3}{7} \\ 21x - 14 &= 10x + 15 \\ 11x &= 29 \\ x &= \frac{29}{11} \approx 2.\overline{63} \end{aligned}$$

Der y-Wert des Schnittpunkts ergibt sich durch einsetzen in eine der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{5} \cdot \frac{29}{11} - \frac{2}{5} \\ y &= \frac{13}{11} \approx 1.\overline{18} \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt hat also die Koordinaten: $SP(2.\overline{63}/1.\overline{18})$.
Beide Geraden steigen an. Daher muss vom größeren Steigungswinkel der kleinere abgezogen werden.

$$\begin{array}{lll} g: \quad m = \frac{3}{5} & \Rightarrow & \alpha = \arctan(\frac{3}{5}) \approx 30.9638° \\ h: \quad m = \frac{2}{7} & \Rightarrow & \beta = \arctan(\frac{2}{7}) \approx 15.9454° \end{array}$$

Der Schnittwinkel beträgt also $30.96 - 15.94 \approx 15.02°$

A2. Gegeben sind eine Gerade durch die Gleichung:

$$g : y = \frac{2}{9}x - \frac{4}{9}$$

und ein Punkt mit den Koordinaten: $P(1/5)$.
Weise nach, dass der Punkt **nicht** auf der Geraden liegt und bestimme die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt P verläuft und die Gerade g senkrecht schneidet.
Lösung:
Um zu überprüfen, ob der Punkt auf der Geraden liegt, müssen seine Koordinaten nur in die Gleichung eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{2}{9} \cdot 1 - \frac{4}{9} \\ 5 &= -\frac{2}{9}(f) \end{aligned}$$

Offenbar liegt der Punkt nicht auf der Geraden.
Die Gerade, welche g senkrecht schneidet, hat die Steigung: $-\frac{9}{2}$ (denn: $\frac{2}{9} \cdot -\frac{9}{2} = -1$). Ihr y-Achsen-Abschnitt lässt sich dadurch berechnen, dass man den Punkt P in die vorläufige Gleichung einsetzt:

$$\begin{aligned} 5 &= -\frac{9}{2} \cdot 1 + n \\ \frac{19}{2} &= n \end{aligned}$$

Die Gleichung der gesuchten Geraden lautet also: $y = -\frac{9}{2}x + \frac{19}{2}$

A3. Bestimme die Gerade, welche durch die Punkte $A(1/7)$ und $B(-3/-\frac{1}{7})$ geht.
Lösung:
Man kann zunächst die Steigung der Geraden ermitteln:

$$\begin{aligned} m &= \frac{-\frac{1}{7} - 7}{-3 - 1} \\ &= \frac{-\frac{50}{7}}{-4} \\ &= \frac{25}{14} \approx 1.79 \end{aligned}$$

Setzt man nun in die vorläufige Gleichung einen der Punkte ein, dann kann man auch den y-Achsen-Abschnitt berechnen:

$$\begin{aligned} 7 &= \frac{25}{14} \cdot 1 + n \\ n &= \frac{73}{14} \approx 5.21 \end{aligned}$$

Die Geradengleichung lautet also: $y = \frac{25}{14}x + \frac{73}{14}$.

A4. Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(1/3)$, $B(5/2)$ und $C(2/7)$. Bestimme **rechnerisch** den Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks.
Lösung:
Um den Schnittpunkt der Höhen zu berechnen, muss der Schnittpunkt von zwei Höhen berechnet werden. Dazu müssen die Gleichungen von zwei Höhen bekannt sein. Es sollen h_a und h_b berechnet werden.
Gleichung der Geraden durch B und C ($Strecke : a$):

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{7-2}{2-5} \\ &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Somit ist die Steigun der Höhe h_a: $m_a = \frac{3}{5}$. Damit lässt sich nun die Gleichung der Höhe zu a berechnen:

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{3}{5} \cdot 1 + n \\ n &= \frac{12}{5} \end{aligned}$$

Damit ist: $h_a : y = \frac{3}{5}x + \frac{12}{5}$
Für h_b gilt:

$$\begin{aligned} m_b &= \frac{7-3}{2-1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Die Steigung der Höhe zu b ist daher: $m_b = -\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} 2 &= -\frac{1}{4} \cdot 5 + n \\ n &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

Die Gleichung der Höhe durch B ist also: $h_b : y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$
Deren Schnittpunkt kann man nun berechnen, indem man die Gleichungen gleich setzt:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x + \frac{12}{5} &= -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \\ \frac{17}{20}x &= \frac{17}{20} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Setzt man nun den x-Wert in (z.B.) h_a ein, erhält man:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{12}{5} \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt ist also: $SP(1/3)$.

A5. Bestimme für das Dreieck aus der letzten Aufgabe die Längen der Seiten und den Mittelpunkt dieser Seiten.
Lösung:
Für die Längen der Seiten gilt:

$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{(5-2)^2 + (2-7)^2} \\ &= \sqrt{9+25} \\ &= \sqrt{34} \approx 5.83 \\ |b| &= \sqrt{(1-2)^2 + (3-7)^2} \\ &= \sqrt{1+16} \\ &= \sqrt{17} \approx 4.12 \\ |c| &= \sqrt{(1-5)^2 + (3-2)^2} \\ &= \sqrt{16+1} \\ &= \sqrt{17} \approx 4.12 \end{aligned}$$

Für die Mittelpunkte gilt:

$$\begin{aligned} m_a &= \left(\frac{5+2}{2} / \frac{2+7}{2}\right) \\ &= (3.5/4.5) \\ m_b &= \left(\frac{1+2}{2} / \frac{3+7}{2}\right) \\ &= (1.5/5) \\ m_c &= \left(\frac{1+5}{2} / \frac{3+2}{2}\right) \\ &= (3/2.5) \end{aligned}$$

A6. Bestimme die Lage des Punktes $P(2/1)$ bezüglich des angegebenen Kreises $k : x^2+y^2-2x+2y-2 = 0$.
Lösung:
Zunächst muss die Kreisgleichung auf die Normalform gebracht werden:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 &= 0 \\ x^2 - 2x \quad + y^2 + 2y &= 2 \\ x^2 - 2x + 1 \quad + y^2 + 2y + 1 &= 4 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 &= 2^2 \end{aligned}$$

Der Kreis hat also den Mittelpunkt $(1/-1)$ und den Radius $r = 2$. Der Abstand des Punktes vom Mittelpunkt des Kreises beträgt:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(2-1)^2 + (1+1)^2} \\ &= \sqrt{1+4} \\ &= \sqrt{5} \approx 2.24 \end{aligned}$$

Da der Punkt weiter als der Radius vom Mittelpunkt entfernt ist, liegt der Punkt außerhalb des Kreises.

A7. Ein Kreis hat den Mittelpunkt $M(2/-1)$ und den Radius $r = 3$. Außerdem ist eine Gerade durch die Gleichung $g : y = 2x + 3$ gegeben. Bestimme die Lage der Geraden zum Kreis und bestimme ggf. die Schnittpunkte von Gerade und Kreislinie.

Lösung:
Die Gleichung des Kreises ist: $k : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$. Ersetzt man in dieser Gleichung das y durch den Ausdruck $2x+3$, dann erhält man:

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 + (2x+3+1)^2 &= 9 \\
(x-2)^2 + (2x+4)^2 &= 9 \\
x^2 - 4x + 4 \quad + 4x^2 + 16x + 16 &= 9 \\
5x^2 + 12x + 11 &= 0 \\
x^2 + 2.4x + 2.2 &= 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung (p-q-Formel). Daher ist die Gerade eine Passante.

A8. Ein Kreis ist durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ gegeben. Zeige, dass die Gerade $g : y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ eine Tangente an den Kreis ist und berechne den Berührpunkt sowie die Gerade auf welcher der Berührradius liegt.
Lösung:
Analog zur letzten Aufgabe ergibt sich:

$$\begin{aligned}
x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}\right)^2 &= 25 \\
x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{150}{16}x + \frac{625}{16} &= 25 \\
16x^2 + 9x^2 - 150x + 625 &= 400 \\
25x^2 - 150 + 225 &= 0 \\
x^2 - 6x + 9 &= 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat nur die Lösung $x = 3$. Setzt man $x = 3$ in die Geradengleichung ein, dann erhält man den y-Wert des Berührpunktes:

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{25}{4} \\
&= -\frac{9}{4} + \frac{25}{4} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Der Berührpunkt hat demnach die Koordinaten $B(3/4)$.
Da der Mittelpunkt des Kreises im Ursprung des Koordinatensystems liegt, ist die Gleichung der Geraden mit dem Berührradius: $g : y = \frac{4}{3}x$.