A1. Eine Warenhauskette verkauft ein Produkt an unterschiedlichen Standorten zu jeweils einem anderen Preis, um so herauszufinden, bei welchem Preis der maximale Gewinn erzielt werden kann. Für sechs Filialen sieht das Ergebnis folgendermaßen aus:

Filiale	1	2	3	4	5	6
Stückpreis	20	16	15	16	13	10
Verkaufte Menge	0	3	7	6	4	10

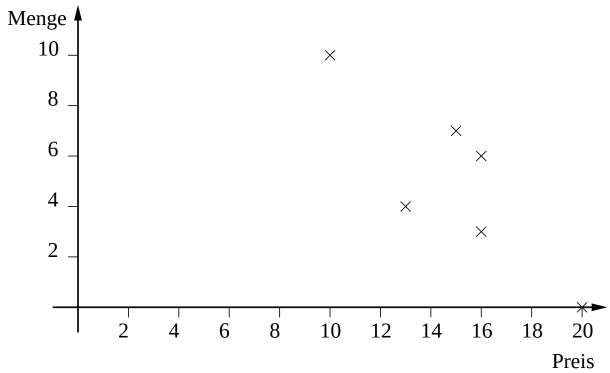
a) Zeichne zu den obigen Daten eine Punktwolke und berechne ihren Mittelpunkt.

b) Wie stehst du zu der Aussage: '*Je größer der Verkaufspreis, desto geringer die verkaufte Menge!*'. Belege deine Meinung mit einer angemessenen statistischen Kennzahl.

c) Für ihre Preisgestaltung braucht die Warenhauskette eine Funktion, mit der die Abhängigkeit zwischen Produktpreis und verkaufter Menge berechnet werden kann. Stelle für diesen Zweck die Gleichung der Regressionsgeraden auf.

Lösung:

a) Die Punktwolke hat das folgende Ausehen:



Der Mittelwert der x-Werte ist:

$$\frac{1}{6}(20+16+15+16+13+10) = 15$$

der der y-Werte ist:

$$\frac{1}{6}(0+3+7+4+6+10) = 5$$

Der Mittelpunkt der Punktwolke hat daher die Koordinaten (15/5).

b) Gefragt ist die Kovarianz der Daten. Diese berechnet sich zu:

$$\frac{1}{6}[(20-15)(0-5)+(16-15)(3-5)+\ldots+(10-15)(10-5)] = -\frac{55}{6} \approx -9.17$$

Offenbar stimmt die Behauptung, da die Kovarianz negativ ist.

c) Neben der schon berechneten Kovarianz muss nun noch die Varianz der x-Werte berechnet werden:

$$\frac{1}{6}[(20-15)^2+(16-15)^2+\ldots+(10-15)^2] = \frac{56}{6} \approx 9.33$$

Somit berechnet sich die Steigung der Regressionsgeraden zu:

$$a = \frac{-\frac{55}{6}}{\frac{56}{6}} = -\frac{55}{56} \approx -0.98$$

Die Gleichung der Regressionsgeraden ist dann daher:

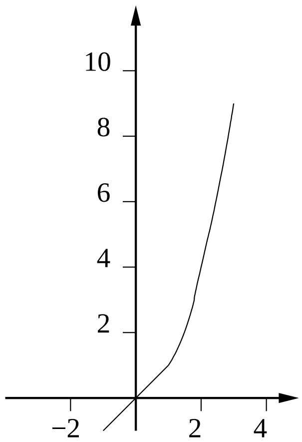
$$y = -0.98(x-15)+5$$

A2. Gegeben ist die folgende, stückweise definierte Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ für } x < 1 \\ x^2 \text{ für } x > 1 \end{cases}$$

Zeichne den Funktionsgraphen für $x = -1$ bis $x = 3$

Lösung:



A3. Gegeben sind die folgenden Funktionen durch ihre Funktionsgleichungen. Bestimme jeweils den y-Achsen-Abschnitt (Forme dazu ggf. die Funktionsgleichung zunächst um).

a)	$f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 7$	b)	$f(x) = 4x^4 - 3 + 2x^3 + 5x^2 - 13x$
c)	$f(x) = 2(x-3)(x+5)(x-1)$	d)	$f(x) = (x^4 + 16)(x^4 - 16)$

Lösung:

a) -7

b) -3

c) 30 $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 34x + 30$

d) 256 $f(x) = x^8 - 256$

A4. Gegeben sind die folgenden Funktionsgleichungen. Untersuche bei diesen Funktionen das Verhalten im Unendlichen.

a)	$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 13$	b)	$f(x) = -3x^3 + 102x^2 - 22x + 51$
c)	$f(x) = -3(x^2 + 1)(x^2 - 2)$		

Lösung:

a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
c)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

A5. Welche Aussage kannst du über die Symmetrie der Funktionsgraphen zu folgenden Funktionen machen?

a)	$f(x) = 3x^7 + 2x^5 - x$	b)	$f(x) = 4x^6 - x^2 + 1$
c)	$f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 34x - 2$	d)	$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 4)$

Lösung:

a) punktsymmetrisch zum Ursprung

b) achsensymmetrisch zur y-Achse

c) keine Symmetrie erkennbar

d) achsensymmetrisch zur y-Achse

A6. Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen

a)	$f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{12}$	b)	$f(x) = 2x^2 - 18x + 28$
c)	$f(x) = x^3 - 8x^2 + 7x$	d)	$f(x) = (x-1)(x+3)(x-4)(x+7)$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{12} \\ \tfrac{1}{12} &= \tfrac{2}{3}x \\ \tfrac{1}{8} &= x \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 18x + 28 \\ 0 &= x^2 - 9x + 14 \\ 0 &= (x-2)(x-7) \\ x = 2 &\vee x = 7 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 8x^2 + 7x \\ 0 &= x(x-1)(x-7) \\ x = 0 &\vee x - 1 \vee x = 7 \end{aligned}$$

d)
$$x = 1 \vee x = -3 \vee x = 4 \vee x = -7$$

A7. Bei der folgenden Aufgabe sei t eine beliebige, positive reelle Zahl. Bestimme die Nullstellen der Funktion:

$$f(x) = x^2 - (1+t)x + t$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x^2 - (1+t)x + t &= x^2 - (1+t)x + \left(\frac{1+t}{2}\right)^2 - \frac{1+2t+t^2}{4} + \frac{4t}{4} \\ &= \left(x - \frac{1+t}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-t}{2}\right)^2 \\ &= (x-t)(x-1) \end{aligned}$$

Die Funktion hat die Nullstellen $x = 1$ und $x = t$