## Jgst. 11/II 2.Klausur 27.5.2010

A1. Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen (Der Rechenweg muss angegeben werden!):

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $f(x) = 2x^2 - 12x - 14$ | b) | $f(x) = x^3 - 13x + 12$ |
| c) | $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ | d) | $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ |

**Lösung:**

a)

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 12x - 14 \\ &= x^2 - 6x - 7 \\ &= x^2 - 6x + 9 - 16 \\ &= (x-3)^2 - 4^2 \\ &= (x-7)(x+1) \\ x &= 7 \vee x = -1 \end{aligned}$$

b) Die erste Nullstelle muss geraten werden, z.B. $x = 1$. Die Polynomdivision ergibt dann:

$$f(x) = (x-1)(x^2 + x - 12)$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + x - 12 \\ &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{49}{4} \\ &= (x + \frac{1}{2}) - (\frac{7}{2})^2 \\ &= (x+4)(x-3) \\ x &= 1 \vee x = 3 \vee x = -4 \end{aligned}$$

c) Auch hier muss die erste Nullstelle wieder geraten werden, z.B. $x = 2$, das ergibt dann:

$$f(x) = (x-2)(x^2 - x + 6)$$

Analog zu b) ergibt sich dann:

$$x = -2 \vee x = 2 \vee x = 3$$

d) Hier können die Nullstellen durch Substitution ermittelt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 - 13z + 36 \\ &= (z-4)(z-9) \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Nullstellen

$$x = -2 \vee x = 2 \vee x = -3 \vee x = 3$$

A2. Bestimme mit der $h$-Methode die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 - 3$ an der Stelle $x = 2$.
**Lösung:**

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 3 - (2^2 - 3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 3 - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (4+h) \\ &= 4 \end{aligned}$$

A3. Bestimme die Ableitungsfunktion zu der Funktion $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$. Verwende dabei pro Schritt jeweils nur **eine** Ableitungsregel und gib diese an.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= [2x^2 - 3x + 7]' && \mid \text{Summenregel} \\ &= [2x^2]' - [3x^1]' + [7x^0]' && \mid \text{Faktorregel} \\ &= 2[x^2]' - 3[x^1]' + 7[x^0]' && \mid \text{Potenzregel} \\ &= 4x - 3 \end{aligned}$$

A4. Bestimme die Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen (Ggf. sollte dabei die Kettenregel verwendet werden!)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $f(x) = 13x^7 - 22x^4 + 7x^2 - 1$ | b) | $f(x) = x + \sqrt{x}$ | c) | $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^2}$ |
| d) | $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2}$ | e) | $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt[5]{x^3}}$ | f) | $f(x) = (2x^2 - 3x + 7)^3$ |

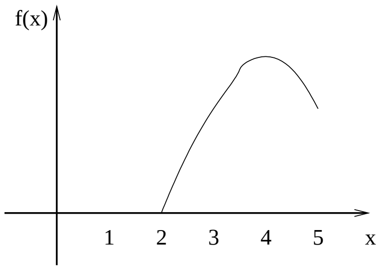
**Lösung:**

| | | |
|---|---|---|
| a) | $f'(x) = 91x^6 - 88x^3 + 14x$ | |
| b) | $f'(x) = [x + x^{\frac{1}{2}}]'$ | $= 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ |
| c) | $f'(x) = [x^{-3} + 2x^{-2}]'$ | $= -3x^{-4} - 4x^{-3}$ |
| d) | $f'(x) = [3x^{\frac{2}{3}}]'$ | $= 2x^{-\frac{1}{3}}$ |
| e) | $f'(x) = [-x^{-\frac{3}{5}}]'$ | $= \frac{3}{5}x^{-\frac{8}{5}}$ |
| f) | $f'(x) = 3(2x^2 - 3x + 7)^2 \cdot (4x - 3)$ | |

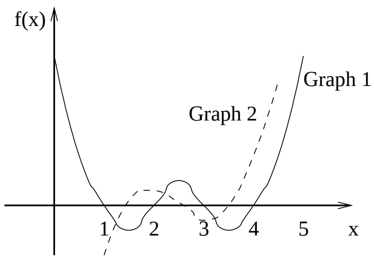
A5. Eine Funktion hat bei $x = 2$ eine Nullstelle. Außerdem ist von der Funktion bekannt, dass sie die Ableitungen:

$$f'(2) = 2, f'(3) = 1, f'(4) = 0, f'(5) = -1$$

hat.
Skizziere aufgrund dieser Informationen den ungefähren Verlauf des Funktionsgraphen im Bereich: $x = 2$ bis $x = 5$.
**Lösung:**




A6. In einem Koordinatensystem sind die folgenden zwei Funktionsgraphen abgebildet. Gibt eine **begründete** Vermutung ab, welches der Graph der ursprünglichen und welches der Graph der Ableitungsfunktion sein könnte.




**Lösung:**
Graph 1 ist der Graph der ursprünglichen Funktion (durchgezogen) und Graph 2 der der Ableitungsfunktion (gestrichelt), denn überall da, wo die ursprüngliche Funktion eine waagerechte Tangente hat, hat der gestrichelte Graph eine Nullstelle (ist also die Steigung gleich Null).

A7. Gib die ersten drei Ableitungen der Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 6$ an.
**Lösung:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 4x - 3 \\ f''(x) &= 6x + 4 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

A8. (**Achtung Denkaufgabe!** Mit nur einem Punkt.) Die erste Ableitung gibt für jedes $x$ die Steigung des Graphen der ursprünglichen Funktion an. Dies ist die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion. Man kann die erste Ableitung auch dahingehende interpretieren, dass man sagt, sie gibt die Änderung der ursprünglichen Funktion an (große Steigung = große Änderung des Funktionsgraphen).
Insofern gibt die zweite Ableitung die Änderung der Steigung (= erste Ableitung) an.
Was bedeutet das für den Funktionsgraphen der ursprünglichen Funktion?
(Hilfe: Überlege, was es bedeutet, wenn $f''(x) > 0$ ist, also die Steigung der ursprünglichen Funktion zunimmt; bzw. was es bedeutet, wenn $f''(x) < 0$, also die Steigung abnimmt.)
**Lösung:**
Die zweite Ableitung gibt die Krümmung des ursprünglichen Funktionsgraphen an.