Jgst. 11/I 1.Klausur 4.11.2010

A1. Bestimme den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der beiden folgenden Geraden:

$$g : 3x - 2y = 5 \qquad h : -4 + 3y = 5x$$

Lösung:
Zunächst müssen die beiden Geraden auf Normalform gebracht werden:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ -2y &= -3x + 5 \\ y &= \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4 + 3y &= 5x \\ 3y &= 5x + 4 \\ y &= \frac{5}{3}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Somit sind die Steigungen: $m_g = \arctan(\frac{3}{2}) \approx 56.31°$ und $m_h = \arctan(\frac{5}{3}) \approx 59.04°$. Offenbar ist der Schnittwinkel 2.73°.
Zum Berechnen des Schnittpunktes müssen die beiden Geraden gleich gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} &= \frac{5}{3}x + \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{2} &= \frac{1}{6}x + \frac{4}{3} \\ -\frac{23}{6} &= \frac{1}{6}x \\ -23 &= x \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert in eine der Gleichungen ein, dann erhält man: $y = \frac{3}{2}(-23) - \frac{5}{2} = -37$. Der Schnittpunkt ist also: $SP(-23/-37)$.

A2. Gegeben ist die Gerade $g : y = 2x + 3$ und der Punkt $P(4/1)$.

a) Weise nach, dass der Punkt P **nicht** auf der Geraden g liegt.

b) Bestimme die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt P geht und den Steigungswinkel 60° hat.

Lösung:

a) Zum Nachweis, dass P nicht auf g liegt, muss der Punkt nur in die Geradengleichung eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot 4 + 3 \\ 1 &= 11 \end{aligned}$$

Offenbar ist die Aussage *falsch* und daher ergibt sich, dass P nicht auf g liegt.

b) Wenn der Steigungswinkel 60° beträgt, dann ist die Steigung der gesuchten Geraden: $m = \tan(60) = \sqrt{3} \approx 1.73$. Damit kann die Gleichung der Geraden berechnet werden:

$$\begin{aligned} 1 &= 4\sqrt{3} + n \\ 1 - 4\sqrt{3} &= n \\ -5.93 &\approx n \end{aligned}$$

Die gesuchte Geradengleichung ist also:

$$h : y = 1.73x - 5.93$$

A3. Untersuche rechnerisch, ob die Punkte $A(2/6)$, $B(-4/3)$ und $C(6/8)$ auf einer Geraden liegen.
Lösung:

Zunächst muss zu zwei Punkten die Geradengleichung bestimmt werden, auf denen diese beiden Punkte liegen:

$$\begin{aligned} 6 &= 2m+n \\ 8 &= 6m+n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6-2m &= n \\ 8 &= 6m+6-2m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6-2m &= n \\ 2 &= 4m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 &= n \\ \tfrac{1}{2} &= m \end{aligned}$$

Somit lautet die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 5$. Um zu testen, ob auch der dritte Punkt (B) auf der Geraden liegt, müssen seine Koordinaten in diese Gleichung eingesetzt werden:

$$3 = -4 \cdot \frac{1}{2} + 5$$
$$3 = 3$$

Offenbar liegen alle drei Punkte auf einer Geraden, da die Aussage *wahr* ist.

A4. Gegeben ist ein Viereck durch die vier Punkte $A(2/2)$, $B(14/6)$, $C(9/7)$ und $D(3/5)$. Berechne die Innenwinkel des Vierecks (auf eine Dezimalstelle genau). Um welche Sonderform eines Vierecks handelt es sich (Wird nur auf Grundlage einer **Berechnung** gewertet!)

Lösung:

Um die Innenwinkel des Vierecks bestimmen zu können, müssen zunächst die vier Geraden bestimmt werden, auf denen die Eckpunkte des Vierecks liegen (außerdem können sofort die Steigungswinkel berechnet werden):

$$\begin{aligned} 2 &= 2m+n \\ 6 &= 14m+n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \tfrac{4}{3} \\ m &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcll} a_{AB} & : & y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} & \alpha = 18.4^\circ \\ b_{BC} & : & y = -\frac{1}{5}x + \frac{44}{5} & \beta = -11.3^\circ \\ c_{CD} & : & y = \frac{1}{3}x + 4 & \gamma = 18.4^\circ \\ d_{DA} & : & y = 3x - 4 & \delta = 71.6^\circ \end{array}$$

Damit ergeben sich die folgenden Innenwinkel:

$$\begin{array}{lcl} A & : & 71.6 - 18.4 = 53.2^\circ \\ B & : & 18.4 + 11.3 = 29.7^\circ \\ C & : & 180 - (18.4 + 11.3) = 150.3^\circ \\ D & : & 360 - 53.2 - 29.7 - 150.3 = 126.8^\circ \end{array}$$

Da die Strecken a und c parallel sind und die Strecken b und d nicht, handelt es sich um ein Trapez.

A5. Gegeben ist ein Dreieck durch die Punkte $A(1/2)$, $B(3/7)$ und $C(5/3)$. In welchem Punkt schneiden sich die Höhen des Dreiecks?

Lösung:

Es müssen nur zwei Höhen berechnet werden, denn die drei Höhen schneiden sich immer in einem Punkt. Daher werden hier nur die Höhen h_a und h_b berechnet.

Zu h_a, der Höhe vom Punkt A auf die Seite a.

Die Gerade auf der die Seite a liegt, geht durch die Punkte B und C. Sie hat die Steigung:

$$m_a = \frac{3-7}{5-3} = \frac{-4}{2} = -2$$

Somit hat die gesuchte Höhe die Steigung: $m_{h_a} = \frac{1}{2}$. Damit berechnet sich deren Gleichung zu:

$$2 = 1 \cdot \frac{1}{2} + n$$
$$\frac{3}{4} = n$$

und somit: $h_a : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.
Analog ergibt sich für $h_b : y = -4x + 19$. Der Schnittpunkt der beiden Höhen berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} &= -4x + 19\\ \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} &= 19\\ \frac{9}{2}x &= \frac{35}{2}\\ x &= \frac{35}{9}\end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhält man: $y = \frac{31}{9}$ und damit den gesuchten Schnittpunkt: $SP(3.88/3.44)$

A6. **Kannst du das noch?** Der Winkel zwischen der Spitze eines in der Ebene stehenden Turms und der Horizontalen ist $4.6°$ groß. Nachdem man sich dem Turm um $10m$ genähert hat, beträgt dieser Winkel nun $4.7°$. Wie hoch ist der Turm?
Lösung:
Bezeichnet man die Höhe des Turms mit h und die (zweite) Entfernung zum Turm mit x, dann ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{h}{x+10} &= \tan(4.6)\\ \frac{h}{x} &= \tan(4.7)\end{aligned}$$

Dieses Gleichungsszstem lässt sich leicht lösen und es ergibt sich: $x = 457.96$ und $h = 37.65$
Der Turm ist also 37.65m hoch!

A1. Gegeben sind die beiden Geraden

$$g : -3x + 5 = 4y \quad \text{und} \quad h : 3y - 4x + 7 = 0$$

Bestimme von diesen beiden Geraden den Schnittpunkt und Schnittwinkel.
Lösung:
Zuerst müssen die beiden Geraden in Normalform gebracht werden:

$$\begin{aligned} -3x + 5 &= 4y \\ 4y &= -3x + 5 \\ y &= -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y - 4x + 7 &= 0 \\ 3y &= 4x - 7 \\ y &= \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Da gilt: $m_g \cdot m_h = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = -1$ erkennt man sofort, dass die Geraden aufeinander senkrecht stehen.
Zur Berechnung des Schnittpunktes müssen die beiden Geraden gleich gesetzt werden:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} &= \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \\ \frac{5}{4} &= \frac{25}{12}x - \frac{7}{3} \\ \frac{43}{12} &= \frac{25}{12}x \\ \frac{43}{25} &= x \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert in eine der Gleichungen ein, dann erhält man: $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{43}{25} - \frac{7}{3} = -\frac{1}{25}$. Der Schnittpunkt ist also $SP(\frac{43}{25}/-\frac{1}{25})$ oder $SP(1.72/-0.04)$

A2. Gegeben ist die Gerade: $g : y = -2x + 3$ und der Punkt $P(-1/-2)$.

a) Weise nach, dass der Punkt P **nicht** auf der Geraden g liegt.

b) Bestimme die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt P geht und den Steigungswinkel $30°$ hat.

Lösung:

a) Zum Nachweis, dass P nicht auf g liegt, muss der Punkt nur in die Geradengleichung eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} -2 &= -2 \cdot (-1) + 3 \\ -2 &= 5 \end{aligned}$$

Offenbar ist die Aussage *falsch* und daher liegt P nicht auf g.

b) Die Steigung der gesuchten Geraden ist: $m_h = \tan(30°) = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0.58$. Setzt man diese Steigung und den Punkt in die allgemeine Geradengleichung ein, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} -2 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot (-1) + n \\ -2 + \sqrt{\frac{1}{3}} &= n \\ -1.67 &\approx n \end{aligned}$$

Somit lautet die gesuchte Gleichung: $h : y = 0.58x - 1.67$

A3. Weise rechnerisch nach, ob die drei Punkte $A(1/5)$, $B(-2/-1)$ und $C(\frac{1}{2}/5)$ auf einer Geraden liegen.
Lösung:

Zunächst muss für zwei der Punkte die Geradengleichung der Geraden berechnet werden, auf der sie liegen:

$$\begin{aligned} 5 &= m+n \\ -1 &= -2m+n \\[4pt] 5-m &= n \\ -1 &= -2m+5-m \\[4pt] 3 &= n \\ 2 &= m \end{aligned}$$

Die Geradengleichung ist also $y = 2x + 3$. Um nun zu ermitteln, ob auch der dritte Punkt auf dieser Geraden liegt, müssen seine Koordinaten in diese Gleichung eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} 5 &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \\ 5 &= 4 \end{aligned}$$

Offenbar liegt der Punkt C nicht auf der Geraden, da die Aussage *falsch* ist.

A4. Gegeben ist ein Viereck durch die vier Punkte $A(-3/2)$, $B(5/4)$, $C(4/8)$ und $D(-8/5)$. Bestimme die vier Innenwinkel des Vierecks (auf eine Dezimalstelle genau) und gib an, um welche Sonderform eines Vierecks es sich handelt (Wird nur bei **Berechnung** gewertet!)
Lösung:
Zunächst müssen die vier Geradengleichungen der Vierecksseiten und ihre jeweiliger Steigungswinkel berechnet werden:

$$\begin{aligned} 2 &= -3m+n \\ 4 &= 5m+n \\[4pt] n &= \tfrac{11}{4} \\ m &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcll} a_{AB} & : & y = \frac{1}{4}x + \frac{11}{4} & \alpha = 14.0^\circ \\ b_{BC} & : & y = -4x + 24 & \beta = -76.0^\circ \\ c_{CD} & : & y = \frac{1}{4}x + 7 & \gamma = 14.0^\circ \\ d_{DA} & : & y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5} & \delta = -31.0^\circ \end{array}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Innenwinkel:

$$\begin{array}{lcl} A & : & 180 - (14 + 31) = 180 - 44 = 136^\circ \\ B & : & 90^\circ \\ C & : & 90^\circ \\ D & : & 14 + 31 = 44^\circ \end{array}$$

Da a und c parallel sind, handelt es sich um ein Trapez (die beiden rechten Winkel haben keinen weiteren Einfluss).

A5. Gegeben ist ein Dreieck durch seine Eckpunkte $A(-1/0)$, $B(3/-1)$ und $C(1/6)$. Bestimme den Schnittpunkt der drei Höhen dieses Dreiecks.
Lösung:
Da sich die drei Höhen eines Dreiecks immer in einem Punkt schneiden, muss nur der Schnittpunkt von zwei Höhen berechnet werden. Hier wird der Schnittpunkt der Höhen h_a und h_b berechnet.
Zu h_a, also von A auf die Strecke BC.
Die Gerade von B nach C hat die Steigung:

$$m = \frac{6-(-1)}{1-3} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$$

Die gesuchte Höhe hat daher die Steigung: $m_{h_a} = \frac{2}{7}$. Damit lässt sich auch der yAA ausrechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= (-1) \cdot \frac{2}{7} + n \\ \frac{2}{7} &= n \end{aligned}$$

Somit ist $h_a : y = \frac{2}{7}x + \frac{2}{7}$.

Analog ergibt sich für $h_b: y = -\frac{1}{3}x = 0$. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ergibt sich zu:

$$\frac{2}{7}x + \frac{2}{7} = -\frac{1}{3}x$$
$$2/over7 = -\frac{11}{14}x$$
$$-\frac{4}{11} = x$$

Durch Einsetzen erhält man: $y = -\frac{1}{3} \cdot -\frac{4}{11} = \frac{4}{33}$ und damit den Schnittpunkt: $SP(-0.36/0.12)$.

A6. **Kannst du das noch?** Der Winkel zwischen dem näheren Ufer eines 100m breiten Flusses und der Horizontalen wird aus einem Ballon 31° gemessen. Der Winkel zwischen der Horizontalen und dem ferneren Ufer beträgt 26.5°. Wie weit ist der Ballon vom näheren Ufer entfernt (horizontale Entfernung)?

Lösung:

Nennt man die gesuchte Entfernung x und die Höhe des Ballons h, dann ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\frac{h}{x+100} = \tan(26.5)$$
$$\frac{h}{x} = \tan(31)$$

Dieses Gleichungssystem löst sich zu: $x = 487.47$ und $h = 292.90$

Die gesuchte Entfernung beträgt also ca. 487.5m.