Jgst. 11/I 2.Klausur 10.12.2010

A1. Gegeben sind die vier Punkte $A(2/2)$, $B(3/6)$, $C(7/5)$ und $D(6/1)$. Berechne die Gleichung des größten Kreises, den man in das Viereck, das aus diesen Punkten gebildet wird, einzeichnen kann. (Tipp: Zeichne das Viereck in ein Koordinatensystem und überlege dann.)

Lösung:

Es handelt sich offenbar um ein Quadrat. Der Mittelpunkt ist daher der Mittelpunkt zwischen zwei diagonal gegenüber liegenden Punkten und der Radius gleich einer halben Seitenlänge.

$$M(\frac{2+7}{2}/\frac{2+5}{2}) = M(4.5/3.5)$$

$$\begin{aligned} r &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(3-2)^2+(6-2)^2} \\ r &= \tfrac{1}{2}\sqrt{1+16} \\ r &= \tfrac{1}{2}\sqrt{17} \end{aligned}$$

Damit ist die Kreisgleichung:

$$k: (x-4.5)^2 + (y-3.5)^2 = \frac{17}{4}$$

A2. Untersuche, ob durch die folgende Gleichung eine Kreisgleichung gegeben ist und bestimme ggf. den Mittelpunkt und den Radius.

a) $x^2+y^2-8x+10y=-5$ b) $x^2+y^2-4x+14y=-54$

c) $x^2+y^2-x-3y=-\frac{1}{4}$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} x^2+y^2-8x+10y &= -5 \\ x^2-8x+16+y^2+10y+25 &= 36 \\ (x-4)^2+(y+5)^2 &= 6^2 \\ M(4/-5) & \quad r=6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x+14y &= -54 \\ x^2-4x+4+y^2+14y+49 &= -1 \\ (x-2)^2+(y+7)^2 &= -1 \\ \text{Kein Kreis} & \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x^2+y^2-x-3y &= -\tfrac{1}{4} \\ x^2-x+\tfrac{1}{4}+y^2-3y+\tfrac{9}{4} &= \tfrac{9}{4} \\ (x-\tfrac{1}{2})^2+(y-\tfrac{3}{2})^2 &= (\tfrac{3}{2})^2 \\ M(\tfrac{1}{2}/\tfrac{3}{2}) & \quad r=\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

A3. Untersuche die gegenseitige Lage der gegebenen Gerade und des gegebenen Kreises. Gib ggf. Berühr- oder Schnittpunkte an.

a) $k: x^2+y^2-10x-14y+49=0 \quad g: y=-3x+27$

b) $k: x^2+y^2-6x-2y=6 \quad g: y=x+6$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}
x^2+y^2-10x-14y+49 &= 0\\
x^2-10x+25+y^2-14y+49 &= 25\\
(x-5)^2+(y-7)^2 &= 25\\
\Rightarrow \quad (x-5)^2+(-3x+27-7)^2 &= 25\\
x^2-10x+25+9x^2-120x+400 &= 25\\
10x^2-130x+400 &= 0\\
x^2-13x+40 &= 0\\
x_1=5 &\vee\ x_2=8\\
\text{Sekante}&\\
y_1=-3\cdot 5+27 &\qquad y_2=-3\cdot 8+27\\
y_1=12 &\qquad y_2=3\\
SP_1(5/12) &\qquad SP_2(8/3)
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
x^2+y^2-6x-2y &= 6\\
x^2-6x+9+y^2-2y+1 &= 16\\
(x-3)^2+(y-3)^2 &= 16\\
\Rightarrow \quad (x-3)^2+(x+6-1)^2 &= 16\\
x^2-6x+9+x^2+10x+25 &= 16\\
2x^2+4x+34 &= 0\\
x^2+2x+17 &= 0\\
(x+1)^2+16 &= 0\\
\text{Passante}&
\end{aligned}$$

A4. Gegeben sind jeweils zwei Kreise. Bestimme durch Ermittlung von Mittelpunkt und Radius jeweils, wie die beiden Kreise zueinander liegen. (Berühr- oder Schnittpunkte müssen **nicht** bestimmt werden!)

a) $k_1: x^2+y^2-6(x+y)+2=0 \quad k_2: x^2+y^2+8x-4y=-16$

b) $k_1: x^2+y^2-4y=12 \quad k_2: x^2+y^2-4x-4y=-4$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}
x^2+y^2-6x-6y+2 &= 0\\
x^2-6x+9+y^2-6y+9 &= 16\\
(x-3)^2+(y-3)^2 &= 4^2\\
M(3/3) &\qquad r=4\\
x^2+y^2+8x-4y &= -16\\
x^2+8x+16+y^2-4y+4 &= 4\\
(x+4)^2+(y-2)^2 &= 2^2\\
M(-4/2) &\qquad r=2\\
d &= \sqrt{(3-(-4))^2+(3-2)^2}\\
d &= \sqrt{49+1}\\
d &\approx 7.07\\
\text{Die Kreise liegen nebeneinander}&
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
x^2+y^2-4y &= 12\\
x^2+y^2-4y+4 &= 16\\
x^2+(y-2)^2 &= 4^2\\
M(0/2) &\qquad r=4\\
x^2+y^2-4x-4y &= -4\\
x^2-4x+4+y^2-4y+4 &= 4\\
(x-2)^2+(y-2)^2 &= 2^2\\
M(2/2) &\qquad r=2\\
d &= 2\\
\text{Sie berühren sich in einem Punkt}&
\end{aligned}$$

A5. Gegeben ist ein Kreis durch die drei Punkte $A(-2/-2)$, $B(2/6)$ und $C(5/5)$. Berechne die Gleichung dieses Kreises.
Hinweis: Der Mittelpunkt des Kreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks aus diesen drei Punkten und der Radius ist der Abstand dieses Schnittpunkts zu einem der drei gegebenen Punkten.
Lösung:

Zunächst müssen **zwei** Mittelsenkrechte bestimmt werden:

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \tfrac{5-6}{5-2} \\ m_{BC} &= \tfrac{-1}{3} \\ \Rightarrow m_a &= 3 \end{aligned}$$

Der Mittelpunkt der Strecke BC ist:

$$M(\frac{2+5}{2}/\frac{6+5}{2}) = M(3.5/5.5)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 5.5 &= 3 \cdot 3.5 + n \\ -5 &= n \\ \Rightarrow y_a &= 3x - 5 \end{aligned}$$

Analog ergibt sich: $y_b = -x + 3$. Für den Schnittpunkt dieser Geraden ergibt sich:

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= -x + 3 \\ 4x &= 8 \\ x &= 2 \\ \Rightarrow \quad y &= 1 \\ \Rightarrow M(2/1) & \end{aligned}$$

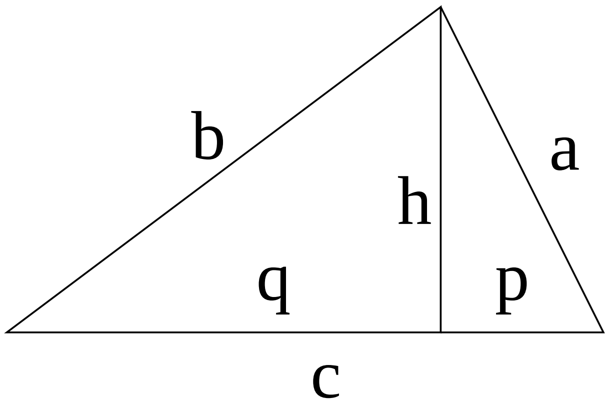
Für den Radius gilt dann:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-1)^2} \\ r &= \sqrt{16+9} \\ r &= 5 \end{aligned}$$

Somit lautet die Kreisgleichung:

$$k : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$$

A6. **GANZ alte Freunde!** Ein Kreis hat den Mittelpunkt $M_1(1/2)$ und den Radius $r_1 = 4$. Der andere Kreis hat den Mittelpunkt $M_2(6/2)$ und den Radius $r_2 = 3$.
Mit den folgenden Bezeichnungen gilt:



a) Kathetensatz: $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$
b) Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Berechne mit dem Katheten- und dem Höhensatz die Schnittpunkte der beiden Kreise.
Lösung:
Die beiden Mittelpunkte der Kreise und (jeder der Schnittpunkte) bilden jeweils ein rechtwinkliges Dreieck (Pythagoras). Somit lassen sich der Katheten und der Höhensatz anwenden. Für die x-Koordinaten der Schnittpunkte ergibt sich:

$$x_s = 1 + \frac{4^2}{5} = 4.2$$

Und mit dem Höhensatz ergibt sich dann für die y-Koordinate:

$$y_s = 2 \pm \sqrt{3.2 \cdot 1.8} = 2 \pm 2.4$$

Damit sind die beiden Schnittpunkte: $S_1(4.2/4.4)$ und $S(4.2/-0.4)$

A1. Gegeben ist ein Viereck durch die Punkte $A(-2/2)$, $B(0/8)$, $C(6/6)$ und $D(4/0)$. Berechne die Gleichung des größten Kreises, der sich in dieses Viereck zeichnen lässt. (Tipp: Zeichne das Viereck in ein Koordinatensystem und überlege dann.)

Lösung:

Offenbar handelt es sich um ein Quadrat. Der Mittelpunkt des Kreises ist daher der Mittelpunkt des Vierecks und der Radius gleich einer halben Quadratseite:

$$M(\frac{-2+6}{2}/\frac{-2+6}{2}) = M(2/2)$$

$$\begin{array}{rcl} r & = & \frac{1}{2}\sqrt{(-2-0)^2+(-2-8)^2} \\ r & = & \frac{1}{2}\sqrt{4+100} \\ r & = & \frac{1}{2}\sqrt{104} \end{array}$$

Die Kreisgleichung lautet daher:

$$k : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 26$$

A2. Untersuche, ob durch die folgende Gleichung eine Kreisgleichung gegeben ist und bestimme ggf. den Mittelpunkt und den Radius.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & x^2+y^2+6x-8y=144 & \text{b)} & x^2+y^2-3x+5y=-\frac{9}{2} \\ \text{c)} & x^2+y^2-2x-20y+102=0 & & \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl} \text{a)} & x^2+y^2+6x-8y & = & 144 \\ & x^2+6x+9+y^2-8y+16 & = & 169 \\ & (x+3)^2+(y-4)^2 & = & 13^2 \\ & M(-3/4) & & r=13 \\ \text{b)} & x^2+y^2-3x+5y & = & -\frac{9}{2} \\ & x^2-3x+\frac{9}{4}+y^2+5y+\frac{25}{4} & = & 4 \\ & (x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2 & = & 2^2 \\ & M(\frac{3}{2}/-\frac{5}{2}) & & r=2 \\ \text{c)} & x^2+y^2-2x-20y+102 & = & 0 \\ & x^2-2x+1+y^2-20y+100 & = & -1 \\ & (x-1)^2+(y-10)^2 & = & -1 \\ & \text{Kein Kreis} & & \end{array}$$

A3. Untersuche die gegenseitige Lage der gegebenen Gerade und des gegebenen Kreises. Gib ggf. Berühr- oder Schnittpunkte an.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & k : x^2+y^2+4x-6y=-4 & g : y = x-2 \\ \text{b)} & k : x^2-4y+y^2-6x=12 & g : y = -\frac{3}{4}x+\frac{21}{2} \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & x^2+y^2+4x-6y &=& -4 \\
& x^2+4x+4+y^2-6y+9 &=& 9 \\
\Rightarrow & (x+2)^2+(x-2-3)^2 &=& 9 \\
& x^2+4x+4+x^2-10x+25 &=& 9 \\
& 2x^2-6x+20 &=& 0 \\
& x^2-3x+10 &=& 0 \\
& (x-1.5)^2+7.75 &=& 0 \\
& \text{Passante} &&
\end{array}$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2 = 9$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{b)} & x^2-4y+y^2-6x &=& 12 \\
& x^2-6x+9+y^2-4y+4 &=& 25 \\
& (x-3)^2+(y-2)^2 &=& 5^2 \\
\Rightarrow & (x-3)^2+(-\frac{3}{4}x+\frac{21}{2}-2)^2 &=& 25 \\
& x^2-6x+9+\frac{9}{16}x^2-\frac{51}{4}x+\frac{189}{4} &=& 0 \\
& \frac{25}{16}x^2-\frac{75}{4}x+\frac{225}{4} &=& 0 \\
& x^2-12x+36 &=& 0 \\
& (x-6)^2 &=& 0 \\
& \text{Tangente} && \\
& y &=& -\frac{3}{4}\cdot 6+\frac{21}{2} \\
& y &=& 6 \\
& B(6/6) &&
\end{array}$$

A4. Gegeben sind jeweils zwei Kreise. Bestimme durch Ermittlung von Mittelpunkt und Radius jeweils, wie die beiden Kreise zueinander liegen. (Berühr- oder Schnittpunkte müssen **nicht** bestimmt werden!)

a) $k_1 : x^2+y^2-6(x+y)+2=0 \quad k_2 : x^2+y^2-8x+2y=-13$

b) $k_1 : x^2+y^2-4y=12 \quad k_2 : x^2+y^2-2(x+y)=2$

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & x^2-6x+9+y^2-6y+9 &=& 16 \\
& (x-3)^2+*y-3)^2 &=& 4^2 \\
& M(3/3) && r=4 \\
& x^2-8x+16+y^2+2y+1 &=& 4 \\
& (x-4)^2+(y+1)^2 &=& 2^2 \\
& M(4/1) && r=2 \\
& d &=& \sqrt{(4-3)^2+(1-3)^2} \\
& d &=& \sqrt{1+4} \\
& d &=& \sqrt{5} \\
& d &\approx& 2.24 \\
& \text{Sie schneiden sich} && \\
\text{b)} & x^2+y^2-4y+4 &=& 16 \\
& x^2+(y-2)^2 &=& 4^2 \\
& M(0/2) && r=4 \\
& x^2-2x+1+y^2-2y+1 &=& 4 \\
& (x-1)^2+(y-1)^2 &=& 2^2 \\
& M(1/1) && r=2 \\
& d &=& \sqrt{(1-0)^2+(1-2)^2} \\
& d &\approx& 1.41 \\
& \text{Sie liegen ineinander} &&
\end{array}$$

A5. Gegeben ist ein Kreis durch die drei Punkte $A(1/3)$, $B(4/-6)$ und $C(-3/-5)$. Berechne die Gleichung dieses Kreises.
Hinweis: Der Mittelpunkt des Kreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks aus diesen drei Punkten und der Radius ist der Abstand dieses Schnittpunkts zu einem der drei gegebenen Punkten.
Lösung:
Für die Mittelsenkrechte durch die Seite a gilt:

$$\begin{array}{rcl}
m_{BC} &=& \frac{-5+6}{-3-4} \\
m_{BC} &=& -\frac{1}{7} \\
\Rightarrow m_a &=& 7
\end{array}$$

Der Mittelpunkt der Strecke BC ist:

$$M(\frac{4-3}{2}/\frac{-6-5}{2}) = M(0.5/-5.5)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} -5.5 &= 7 \cdot 0.5 + n \\ -9 &= n \\ \Rightarrow y_a &= 7x - 9 \end{aligned}$$

Für die Mittelsenkrechte durch b ergibt sich analog: $y_b = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Für den Schnittpunkt der beiden Geraden gilt nun:

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2} &= 7x - 9 \\ 7.5 &= 7.5x \\ 1 &= x \\ \Rightarrow \quad y &= -2 \end{aligned}$$

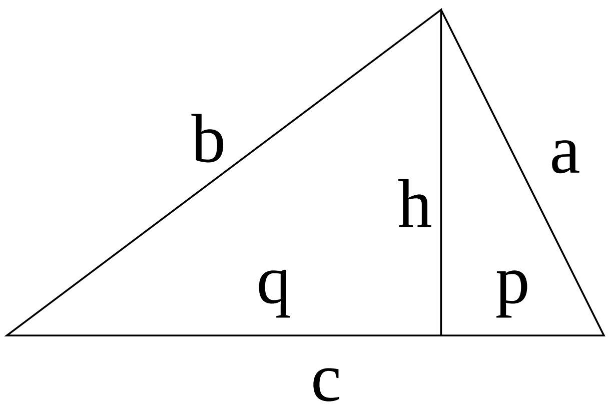
Der Mittelpunkt ist also $M(1/-2)$. Für den Radius gilt:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(1-1)^2 + (-2-3)^2} \\ r &= \sqrt{25} \end{aligned}$$

Somit lautet die Kreisgleichung:

$$k : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

A6. **GANZ alte Freunde!** Ein Kreis hat den Mittelpunkt $M_1(4/-1)$ und den Radius $r_1 = 4$. Der andere Kreis hat den Mittelpunkt $M_2(4/4)$ und den Radius $r_2 = 3$.
Mit den folgenden Bezeichnungen gilt:



a) Kathetensatz: $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$
b) Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Berechne mit dem Katheten- und dem Höhensatz die Schnittpunkte der beiden Kreise.
Lösung:
Offenbar bilden jeweils ein Schnittpunkt mit den beiden Kreismittelpunkten ein rechtwinkliges Dreieck (Pythagoras) und daher können die Sätze angewendet werden.
Für die y-Koordinaten des Schnittpunkts gilt:

$$y_s = 4 - \frac{3^2}{5} = 2.2$$

Für die beiden x-Koordinaten gilt:

$$x_s = 4 \pm \sqrt{1.8 \cdot 3.2} = 4 \pm 2.4$$

Somit sind die Schnittpunkte $S_1(1.6/2.2)$ und $S_2(6.4/2.2)$