Jgst. 11/II 1.Klausur 17.3.2011

A1. Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^2 - 44x + 240$ b) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$
c) $f(x) = x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105$

Lösung:

a)	$x = 10, x = 12$	T.R.
b)	$x = 3, x = 4, x = 5$	T.R.
c)	$x = 1$	Geraten

Nun muss eine Polynomdivision mit $(x - 1)$ erfolgen, sie ergibt:

$$(x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105) \div (x - 1) = x^3 - 15x^2 + 71x - 105$$

Mit dem Taschenrechner ergeben sich die weiteren Nullstellen zu: $x = 3, x = 5, x = 7$

A2. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^4 - 20x^3 + 140x^2 - 400x + 384$$

a) Zeige, dass $x = 2$ eine Nullstelle der Funktion ist.
b) Führe eine Polynomdivision durch und bestimme die restlichen Nullstellen.
c) Führe für die Funktion eine Bereichsuntersuchung durch.

Lösung:

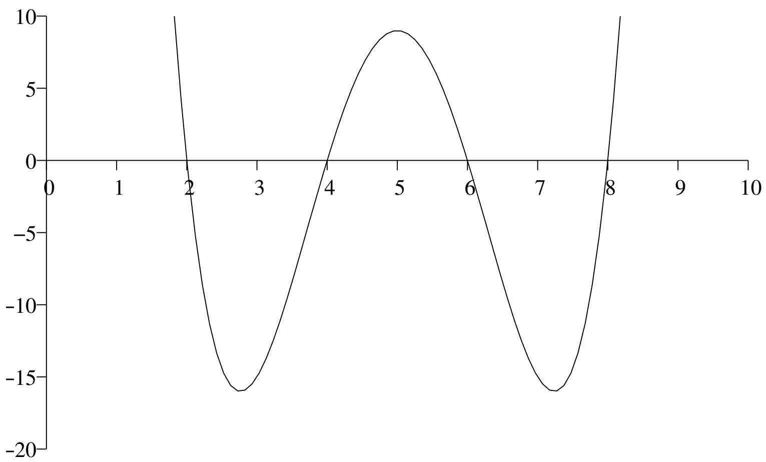
a) Es ist:

$$\begin{aligned} 2^4 - 20 \cdot 2^3 + 140 \cdot 2^2 - 400 \cdot 2 + 384 &= 16 - 160 + 560 - 800 + 384 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $x = 2$ Nullstelle

b)

$$\begin{array}{llllll} (x^4 & -20x^3 & +140x^2 & -400x & +384) & \div(x-2) = x^3 - 18x^2 + 104x - 192 \\ -(x^4 & -2x^3) & & & & \\ \hline & -18x^3 & +140x^2 & & & \\ & -(-18x^3 & +36x^2) & & & \\ \hline & & 104x^2 & -400x & & \\ & & -(104x^2 & -208x) & & \\ \hline & & & -192x & +384 & \\ & & & -192x & +384 & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$



c) Es ergibt sich:

A3. Welche Aussagen können bezüglich der Symmetrie der folgenden Funktionen getroffen werden?

a) $f(x) = 2x^8 - 3x^6 + 2x^2 - 1$ b) $f(x) = 3x^7 - 2x^3 + 3x$
b) $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 1$

Lösung:

a) Achsensymmetrisch zur y-Achse

b) Punktsymmetrisch zum Ursprung

c) Keine Symmetrie erkennbar

A4. Untersuche die folgenden Funktionen auf ihr Verhalten im Unendlichen ($\lim\limits_{x\to\infty}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}$)

$$\text{a)}\qquad f(x) = -2x^3+4x^2+5x-7 \qquad \text{b)}\qquad f(x) = 4x^6-3x^5+\sqrt{13}x^4-7x^3+1$$

Lösung:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \lim\limits_{x\to\infty} = -\infty & \lim\limits_{x\to-\infty} = \infty \\ \text{b)} & \lim\limits_{x\to\infty} = \infty & \lim\limits_{x\to-\infty} = \infty \end{array}$$

A5. Bestimme mit der h-Methode die Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{a)}\qquad f(x) = 2x^3-3x^2 \qquad \text{b)}\qquad f(x) = \frac{1}{2+x}$$

an der Stelle $x_0 = 2$

Lösung:

Es ist:

$$\begin{aligned} \text{a)}\quad \frac{f(h+2)-f(2)}{h} &= \frac{2(h+2)^3-3(2+h)^2-[2(+2)^3-3(+2)^2}{h} \\ &= \frac{2(h^3+6h^2+12h+8)-3(4+4h+h^2)-[16-12]}{h} \\ &= \frac{2h^3+12h^2+24h+16-12-12h-3h^2-4}{h} \\ &= \frac{2h^3+9h^2+12h}{h} \\ &= \frac{h(2h^2+9h+12}{h} \\ &= 2h^2+9h+12 \end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0}(2h^2+9h+12) = 12 = f'(2)$$

$$\begin{aligned} \text{b)}\quad \frac{f(h+2)-f(2)}{h} &= \frac{\frac{1}{4+h}-\frac{1}{4}}{h} \\ &= \frac{\frac{4}{4(4+h)}-\frac{4+h}{4(4+h)}}{h} \\ &= \frac{\frac{-h}{16+4h}}{h} \\ &= \frac{-1}{16+4h} \end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{16+4h}\right) = -\frac{1}{16} = f'(2)$$

A6. Bestimme zur Funktion

$$f(x) = x^2+2x$$

die Gleichung der Tangente und der Normalen an der Stelle $x = 3$. Berechne die Steigung dazu mit der h-Mathode

Lösung:

Zunächst muss der Punkt berechnet werden, in dem die Steigung ermittelt werden soll:

$$f(3) = 3^2+2\cdot 3 = 15 \qquad \Rightarrow \qquad P(3/15)$$

Nun muss die Steigung in diesem Punkt berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(3+h)-f(3)}{h} &= \frac{(3+h)^2+2(3+h)-15}{h} \\
&= \frac{9+6h+h^2+6+2h-15}{h} \\
&= \frac{8h+h^2}{h} = 8+h
\end{aligned}
$$

$$\lim_{h\to 0}(8+h) = 8 = f'(3)$$

Somit ist die Steigung der Tangenten an dem Punkt 8:

$$
\begin{aligned}
15 &= 8\cdot 3+n \\
-9 &= n
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow t: y = 8x-9$$

Die Steigung der Normalen ist dann $-\frac{1}{8}$:

$$
\begin{aligned}
15 &= -\frac{1}{8}\cdot 3+n \\
\frac{123}{8} &= n(=15.375)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow n: y = -\frac{1}{8}x+\frac{123}{8}$$