Jgst. 11/II 1.Klausur 8.4.2011

A1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -x^4 + 12x^3 - 49x^2 + 78x - 40$$

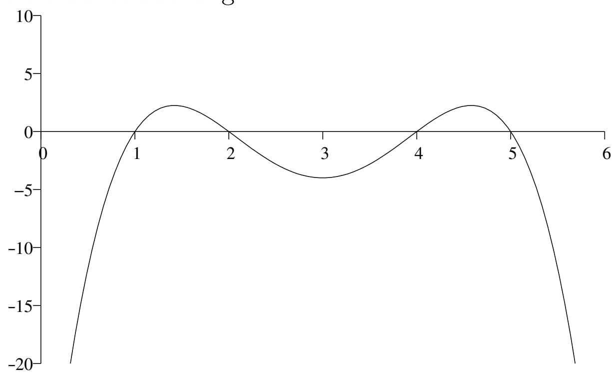
Bestimme alle Nullstellen der Funktion und führe für sie eine Bereichsuntersuchung durch.
Lösung:
Als erste Nullstelle errät man leicht $x = 1$. Die Polynomdivision ergibt:

$$(x-1)(-x^3 + 11x^2 - 38x + 40)$$

Führt man eine weitere Polynomdivision durch, erhält man die Zerlegung:

$$(x-1)(x-2)(x-4)(5-x)$$

und damit dann die Bereichsuntersuchung:



A2. Welche Aussagen lassen sich zur Symmetrie der folgenden Funktionen machen?

a) $f(x) = 3x^5 - x^3 + 7x$

b) $f(x) = (x^6 - 1)(x^4 + 1)$

c) $f(x) = x^{711} - \sqrt{13}x^{537} + \frac{1}{\sqrt{17}}x^{385} - \sqrt[3]{25}$

Lösung:

a) Punktsymmetrisch zum Ursprung

b) Achsensymmetrisch zur y-Achse

c) Keine Aussage möglich

A3. Gibt für die folgenden Funktionen an, wie sie sich im Unendlichen verhalten ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$)

a) $f(x) = 5x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 12x + 7$

b) $f(x) = -3x^7 + 12x^5$

c) $f(x) = -\sqrt{0.2}x^6 + 0.223x^5 + 1.213x$

Lösung:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

A4. Bestimme für die folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 13x - 7$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}$

c) $f(x) = x^2 - \sqrt[3]{x^2}$

d) $f(x) = (3x-2)^4$

Lösung:

a) $f'(x) = 9x^2 - 4x + 13$

b) $f'(x) = -3x^{-4} + 2 \cdot (-2)x^{-3} = -3x^{-4} - 4x^{-3}$

c) $f'(x) = 2x - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

d) $f'(x) = 4(3x-2)^3 \cdot 3 = 324x^3 - 648x^2 + 432x - 96$

A5. Bestimme die ersten drei Ableitungen der Funktion

$$f(x) = 2x^4 + \frac{3}{x^2}$$

Lösung:
Es ist $f(x) = 2x^4 + 3x^{-2}$ und damit:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 - 6x^{-3} \\ f''(x) &= 24x^2 + 18x^{-4} \\ f'''(x) &= 48x - 72x^{-5} \end{aligned}$$

A6. Gegeben die Funktion

$$f(x) = x^3 - x$$

a) Bestimme die Gleichung der Tangenten an die oberste Nullstelle (=Nullstelle mit dem größten x-Wert).

b) Die Tangente hat mit dem Funktionsgraphen eine weitere Schnittstelle. Bestimme auch diese Schnittstelle.
(Konnte Teilaufgabe a) nicht gelöst werden, dann soll an Stelle der Tangentengleichung die Geradengleichung $y = 2x - 2$ verwendet werden.)

c) Die Funktion hat zwei waagerechte Tangenten. Berechne ihren Abstand!

Lösung:

a) Die Funktion hat die Nullstellen $x = 0$, $x = -1$ und $x = 1$. Somit ist die Tangente durch den Punkt $P(1/0)$ gemeint. Es ist

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

und damit die Steigung der Tangenten

$$m = f'(1) = 2$$

Außerdem geht die Tangente durch den Punkt $P(1/0)$ und damit ist:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot 1 + n \\ -2 &= n \end{aligned}$$

und daher die Gleichung der Tangenten

$$t : y = 2x - 2$$

b) Es muss sein:

$$\begin{aligned} x^3 - x &= 2x - 2 \\ x^3 - 3x + 2 &= 0 \\ x &= 1 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Offenbar ist die weiter Schnittstelle bei $x = -2$ und daher der Schnittpunkt: $Q(-2/2\cdot(-2)-2) = Q(-2/-6)$

c) Zunächst muss festgestellt werden, an welchen Stellen die Funktion die waagerechten Tangenten hat, dazu muss die folgende Gleichung gelöst werden:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= \frac{1}{3} \\ x &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Für $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ gilt:

$$f(\sqrt{\frac{1}{3}}) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \approx -0.3849$$

Das ist automatisch auch der yAA der zugehörigen Tangente. Wegen der Symmetrie der Funktion gilt für die andere Tangente der yAA von 0.3849.
Somit ist der Abstand der Tangenten: $2 \cdot 0.3849 = 0.7698$ oder $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$