Jgst. 11/I 1.Klausur 24.11.2011

A1. Bestimme jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = \dfrac{1-2x}{3+x^2}$ b) $f(x) = (1-x^2)\ln(x)$

c) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ d) $f(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{x^2-1}$

Lösung:

a) $f'(x) = \dfrac{-2(3+x^2) - 2x(1-2x)}{(3+x^2)^2}$ b) $f'(x) = -2x\ln(x) + \dfrac{1-x^2}{x}$

c) $f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ d) $f'(x) = \dfrac{-2x\sin(x^2)(x^2-1) - 2x\cos(x^2)}{(x^2-1)^2}$

A2. Für eine Bonbonfirma hat eine Consultingfirma ermittelt, dass sich der Gewinn der Firma durch die Funktion mit der Gleichung:

$$g(x) = (x^2 - x)e^{-x}$$

berechnen lässt. Es gilt: Eine Einheit für x entspricht einer Million Bonbons. Eine Einheit für $g(x)$ entspricht einer Million Euro Gewinn.

a) Weise nach, dass der Gewinn der Firma bei einer Million Bonbons **beginnt**!

b) Wieviele Bonbons sollte die Firma idealerweise produzieren?

c) Wenn die optimale Produktionsmenge überschritten wird, fällt der Gewinn zunächst stark ab. Diese Abnahme schwächt sich allerdings ab einer gewissen produzierten Menge wieder ab. Ab welcher Menge Bonbons passiert das?

d) Angenommen die Firma könnte beliebig viele Bonbons produzieren. Wohin bewegt sich der Gewinn, wenn die Anzahl produzierter Bonbons immer weiter steigt?

Eine kleine Hilfe: Wenn man die Ableitungsfunktionen immer wieder geeignet zusammen fasst, dann ergibt sich: $g'''(x) = (-x^2 + 7x - 9)e^{-x}$.

Lösung:

a) Bei dieser Teilaufgabe muss nachgewiesen werden, dass sich bei $x - 1$ eine Nullstelle befindet und rechts davon der Funktionsgraph im Positiven verläuft.

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 - x)e^{-x} \\ &= (x^2 - x) \\ &= x(x-1) \end{aligned}$$

Daher ergibt sich, dass bei $x - 1$ eine Nullstelle vorliegt. Weiterhin ist:

$$g(1.1) \approx 0.04 > 0$$

und damit ist gezeigt, dass der Gewinn bei einer Million Bonbons beginnt.

b) Hier ist nach dem Maximum der Funktion gefragt. Dazu werden die Ableitungsfunktionen gebraucht:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-x^2 + 3x - 1)e^{-x} \\ g''(x) &= (x^2 - 5x + 4)e^{-x} \\ g'''(x) &= (-x^2 + 7x - 9)e^{-x} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Maximums ist $g'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= (-x^2 + 3x - 1)e^{-x} \\ &= -x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

$$x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 2.618 \vee x = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 0.382$$

Die zweite Lösung kann offenbar nicht in Frage kommen (Siehe Nullstellen) und daher wird die hinreichende Bedingung nur für die erste Nullstelle geprüft.
Die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Maximums ist: $g'(x) = 0 \wedge g''(x) < 0$.

$$g''(2.618) \approx -0.16 < 0$$

.
Damit ist klar, dass die Firma bei einer Anzahl von 2 618 000 Bonbons den größten Gewinn macht.

c) Hier ist nach dem Wendepunkt rechts vom Maximum gefragt. Die notwendige Bedingung dafür lautet: $g''(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 - 5x + 4)e^{-x} \\ &= x^2 - 5x + 4 \\ x = 1 &\vee x = 4 \end{aligned}$$

Hier kommt nur die mögliche Wendestelle $x = 4$ in Betracht.
Die hinreichende Bedingung lautet: $g''(x) = 0 \wedge g'''(x) \neq 0$

$$g'''(4) \approx 0.05 \neq 0$$

Damit ergibt sich, dass ab 4 Millionen Bonbons sich der Rückgang des Gewinns abschwächt.

d) Hier ist nach dem Verhalten im (positiv) Unendlichen gefragt.

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

Die Firma sollte in diesem Fall nicht mehr mit Gewinn rechnen.

A3. Von einer rechteckigen Glasscheibe ist ein dreieckiges Stück abgesplittert (Siehe Skizze). Aus dieser Scheibe soll nun ein möglichst großes rechteckiges Stück Glas geschnitten werden. Für welches x wird dieses Stück maximal und wie groß ist die sich ergebende Scheibe?