Jgst. 11/I 2.Klausur 26.1.2012

A1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

a) Zeige, dass die Funktion nur die Nullstellen $x = 0$ hat (**Tipp:** Es gilt $\ln(1) = 0$!)

b) Zeige, dass für die Funktion gilt:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

Sollten die Ableitungen nicht berechnet werden können, soll dennoch mit ihnen in den folgenden Aufgaben gerechnet werden.

c) Zeige, dass die Funktion nur bei $x = 0$ ein Extremum hat. Um welche Art von Extremum handelt es sich?

d) Berechne alle Wendestellen der Funktion. Verwende dazu, dass gilt:

$$f'''(x) = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$$

e) Skizziere aufgrund deiner Ergebnisse den Graphen der Funktion im Bereich zwischen $x = -2$ und $x = 2$.

Lösung:

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \ln(x^2 + 1) \\ 1 &= x^2 + 1 \\ 0 &= x^2 \\ 0 &= x \end{aligned}$$

b) Für die erste Ableitung ergibt sich mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} i'(x) &= 2x \\ ä'(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} \\ f'(x) &= \frac{2x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Mit der Qutientenregel ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2 \\ v'(x) &= 2x \\ f''(x) &= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

c) Es ist die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2x}{x^2 + 1} \\ 0 &= 2x \\ 0 &= x \end{aligned}$$

Weiterhin ist die hinreichende Bedingung zu prüfen: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$. Es ist

$$f''(0) = 2 > 0$$

Somit handelt es sich um ein Minimum.

d) Die notwendige Bedinung für das Vorliegen eines Wendepunkts ist: $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -2x^2 + 2 \\ 2x^2 &= 2 \\ x^2 &= 1 \\ x = -1 &\vee x = 1 \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung lautet: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$. Es ist:

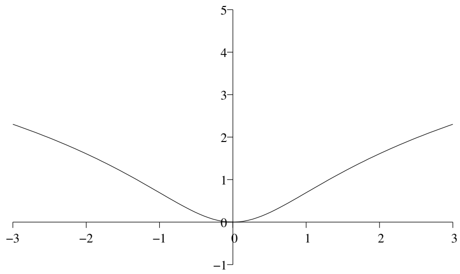
$$f'''(1) = -1 \wedge f'''(-1) = 1$$

Weiterhin ist

$$f(1) = f(-1) \approx 0.69$$

Somit sind die Wendepunkte: $W_1(-1/0.69)$ und $W_2(1/0.69)$

e)



A2. Bestimme die folgenden Integrale

$$\text{a)} \quad \int (x^2 - 3x + 7)dx \quad \text{b)} \quad \int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2)dx$$
$$\text{c)} \quad \int (1 - \sqrt{x})dx$$

Lösung:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x \\ \text{b)} & F(x) = x^5 - x^4 + x^3 \\ \text{c)} & F(x) = x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{array}$$

A3. Bestimme ausführlich (**nicht** Taschenrechner):

$$\int_2^5 (x^2 - 3x + 5)dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int_2^5 (x^2 - 3x + 5)dx &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x\Big|_2^5 \\ &= \frac{1}{3}5^3 - \frac{3}{2}5^2 + 5 \cdot 5 - \left(\frac{1}{3}2^3 - \frac{3}{2}2^2 + 5 \cdot 2\right) \\ &= 22.5 \end{aligned}$$

A4. Die Funktion

$$f(x) = 2xe^x + (x^2 - 2)e^x$$

hat die Nullstellen $x = -1 - \sqrt{3}$ und $x = -1 + \sqrt{3}$.
Zeige, dass die Funktion

$$F(x) = (x^2 - 2)e^x$$

eine Stammfunktion von $f(x)$ ist und bestimme damit die Fläche, welche die Funktion mit der x-Achse einschließt.
Lösung:
Zunächst muss gezeigt werden, dass es sich um eine Stammfunktion handelt, dass also $F'(x) = f(x)$. Mit der Produktregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 - 2 \\ u'(x) &= 2x \\ v(x) &= e^x \\ v'(x) &= e^x \\ F'(x) &= 2xe^x + (x^2 - 2)e^x \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche ist damit:

$$
\begin{aligned}
A &= \left| \int\limits_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}} f(x)dx \right| \\
&= |-3.15| \\
&= 3.15 \text{ FE}
\end{aligned}
$$

A5. Welche Fläche schließen die Funktionen:

$$f(x) = x^2 - 8x + 11 \text{ und } g(x) = 2x + 3$$

mit ihren Graphen ein?

Lösung:

Zunächst müssen die gemeinsamen Punkte der Funktionen ermittelt werden:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 8x + 11 &= 2x + 3 \\
x^2 - 6x + 8 &= 0 \\
x &= 2 \vee x = 4
\end{aligned}
$$

Somit ist die gesuchte Fläche:

$$
\begin{aligned}
A &= \left| \int\limits_{2}^{4} x^2 - 6x + 8dx \right| \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$