Jgst. 11/II 1.Klausur 8.3.2012

A1. Bestimme die Fläche, die durch $x = 2$, $x = 4$, die y-Achse und den Funktionsgraphen der Funktion

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

begrenzt ist.
Lösung:
Zunächst muss untersucht werden, ob die Funktion innerhalb dieses Intervalls noch Nullstellen hat. Der TR liefert: $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. Somit lautet der Ansatz für die gesuchte Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_2^3 f(x)\,dx \right| + \left| \int_3^4 f(x)\,dx \right| \\ &= \left| \left. \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right|_2^3 \right| + \left| \left. \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right|_3^4 \right| \\ &= \left| -9 + \frac{22}{3} \right| + \left| -9 + \frac{20}{3} \right| \\ &= \frac{5}{3} + \frac{7}{3} \\ &= 4 \text{ FE} \end{aligned}$$

A2. Welche Fläche schließen die Funktionen

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 5 \text{ und } g(x) = 2x + 3$$

mit ihren Funktionsgraphen ein?
Lösung:
Zunächst muss festgestellt werden, welche gemeinsamen Stellen die Funktionen haben:

$$\begin{aligned} x^3 - 7x^2 + 16x - 5 &= 2x + 3 \\ x^3 - 7x^2 + 14x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Der TR liefert hierfür: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 4$. Die gesuchte Fläche ist daher:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_1^2 f(x) - g(x)\,dx \right| + \left| \int_2^4 f(x) - g(x)\,dx \right| \\ &= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{37}{12} \text{ FE} \end{aligned}$$

A3. Aus einer Urne mit fünfzig gleichartigen Kugeln, die mit den Nummern '1' bis '50' beschriftet sind, wird zufällig eine gezogen. Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass:

a) Die gezogene Kugel eine gerade Zahl zeigt.
b) Die gezogene Zahl eine Primzahl zeigt.
c) Die gezogene Zahl durch 5 teilbar ist.
d) Die gezogene Zahl ist durch 3 *oder* 4 teilbar.
e) Die gezogene Zahl ist durch 3 *und* 4 teilbar.

Lösung:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$
Die Primzahlen sind: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

c) $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$
Teilbar durch 3 sind: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48.
Teilbar durch 4 sind: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48.

d) $\frac{24}{50} = \frac{12}{25}$

e) $\frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

A4. Hintereinander werden zwei Würfel geworfen. Betrachtet wird dabei die Augensumme. Glb an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Augensumme größer als drei ist.

Lösung:

Die Ergebnisse: (1/1), (1/2) und (2/1) gehören als einzige nicht zum Ergebnis. Sie haben jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$. Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

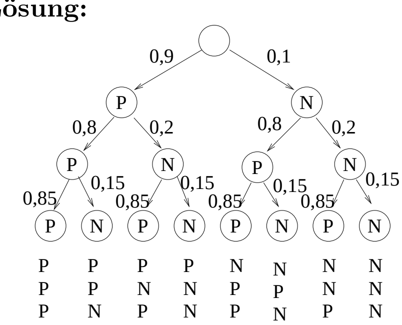
$$1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}$$

A5. Bei einer Produktionskontrolle werden nacheinander Breite, Höhe und Länge eines Metallstücks geprüft. Diese liegen erfahrungsgemäß mit den Wahrscheinlichkeiten: 0.2 (Breite), 0.1 (Höhe) und 0.15 (Länge) außerhalb der Toleranz. Das Metallstück wird nicht ausgeliefert, wenn zwei der drei Kontrollen negativ ausfallen.

a) Zeichne für die obige Situation ein Baumdiagramm.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein kontrolliertes Metallstück nicht ausgeliefert werden kann?

Lösung:



a)

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich aus dem Baumdiagramm ablesen. Sie ist:

$$P(PNN) = \frac{12}{1000} + P(NPN) = \frac{27}{1000} + P(NNP) = \frac{17}{1000} + P(NNN) = \frac{3}{1000} = \frac{49}{1000}$$

A6. Fritz und Katharina spielen Schnick-Schnack-Schnuck. Bei diesem Spiel zeigen beide Spieler gleichzeitig ihre Hand und zwar als Schere (Zeige- und Nittelfinger abgespreitzt), Stein (Faust) oder Papier (flache Hand ausgestreckt). Dabei gewinnt Papier über Stein, Stein über Schere und Schere über Papier. Zeigen beide das gleich Symbol, gewinnt keiner von beiden und das Spiel wird wiederholt.

Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen Fritz etwas zeigt sind: Schere: 0.2, Stein: 0.5 und Papier 0.3. Katharina zeigt die Symbole mit den Wahrscheinlichkeiten: Schere: 0.3, Stein: 0.3 und Papier: 0.4.

Veranschauliche ein Spiel der beiden mit allen möglichen Wahrscheinlichkeiten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Fritz? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Katharina?

Lösung:

Es gibt insgesamt neun verschiedene Möglichkeiten:

Fritz	Schere	Schere	Schere	Stein	Stein	Stein	Papier	Papier	Papier
Katharina	Schere	Stein	Papier	Schere	Stein	Papier	Schere	Stein	Papier
P	0.06	0.06	0.08	0.15	0.15	0.20	0.09	0.09	0.12

Er gewinnt bei: 'Schere - Papier' (0.08), 'Stein - Schere' (0.15) und 'Papier - Stein' (0.09).
Somit gewinnt Fritz mit der Wahrscheinlichkeit:

$$P(F) = 0.08 + 0.15 + 0.09 = 0.32$$

Katharina gewinnt bei 'Schere - Stein' (0.06), 'Stein - Papier' (0.20) und 'Papier - Schere' (0.09).
Somit gewinnt Katharina mit einer Wahrscheinlichkeit von:

$$P(K) = 0.06 + 0.20 + 0.09 = 0.35$$

A7. Zehn Schüler einer Jahrgangsstufe sind nicht versetzt worden. Sie sollen auf die fünf Klassen der nächsten Stufe (a, b, c, d, e) verteilt werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn:

a) In jede der fünf Klassen zwei Schüler kommen sollen.

b) Wenn in die Klassen a, b und c jeweils drei Schüler kommen sollen und einer in Klasse d.

Lösung:

Es handelt sich in jedem Fall um ein Ziehen auf einen Griff, da es auf die Reihenfolge der Schüler nicht ankommt. Die Anzahl der Möglichkeiten ist daher:

a)

$$\begin{aligned}\binom{10}{2}+\binom{8}{2}+\binom{6}{2}+\binom{4}{2}+\binom{2}{2} &= \frac{10!}{8!2!}+\frac{8!}{6!2!}+\frac{6!}{4!2!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{2!}{0!2!}\\ &= 45+28+15+6+1\\ &= 95\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\binom{10}{3}+\binom{7}{3}+\binom{4}{3}+1 &= \frac{10!}{7!3!}+\frac{7!}{4!3!}+\frac{4!}{1!3!}+1\\ &= 120+35+4+1\\ &= 160\end{aligned}$$