Ohne Hilfsmittel!

Q_1 II **1.Klausur** **31.32017**

A1. Bestimme für die folgenden Funktionen eine Stammfunktion.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 7$ b) $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$

Lösung:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 7$
$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 7x$

b) $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$
$f(x) = 2x^2 - 4x + 5$
$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x$

A2. Bestimmt die Fläche, die vom Graphen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 4x$$

und der x-Achse eingeschlossen wird.
Lösung:
Bestimmung der Nullstellen:

$$\begin{aligned} x^3 - 4x &= 0 \\ x(x^2-4) &= 0 \\ x(x+2)(x-2) &= 0 \qquad \text{oder z.B. p-q-Formel} \\ x = 0 \lor x = -2 \lor x = 2 \end{aligned}$$

Bestimmung der Stammfunktion von $f(x)$ und der benötigten Werte:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \\ F(-2) &= \frac{1}{4}16 - 8 = -4 \\ F(0) &= 0 \\ F(2) &= \frac{1}{4}16 - 8 = -4 \end{aligned}$$

Bestimmung der Integrale:

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = -4 - 0 = -4$$

$$\int_{0}^{2} f(x)dx = 0 - 4 = 4$$

Die gesuchte Fläche ist: $A = 4 + 4 = 8$

A3. Gegeben sind jeweils die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Bestimme jeweils $f(g(x))$ und $g(f(x))$.

a) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1$ b) $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = x^2 + 1$

Lösung:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & f(g(x)) & = (x+1)^2 \\ & g(f(x)) & = x^2+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{b)} & f(g(x)) & = \sqrt{x^2+1+1} = \sqrt{x^2+2} \\ & g(f(x)) & = \sqrt{x+1}^2+1 = x+1+1 = x+2 \end{array}$$

A4. Beschreibe "Unbestimmtes Integral", "Bestimmtes Integral" und "Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse". Stell dabei die Zusammenhänge zwischen den Begriffen her.

Lösung:

Mit dem "Unbestimmten Integral" wird eine Stammfunktion berechnet. Das Ergebnis eines "Bestimmten Intergals" ist eine Zahl. Mit Hilfe dieser Zahl kann die "Fläche zwischen Funktionsgraph (der Ursprungsfunktion) und der x-Achse" berechnet werden.

A5. Bestimme die folgenden Integrale (runde ggf. auf zwei Nachkommastellen):

$$\text{a)} \int_1^2 (x-3)^3\,dx \qquad \text{b)} \int_{-1}^{10} \sin(x^2-1)\,dx \qquad \text{c)} \int_1^{1000} \frac{1}{x}\,dx$$

Lösung:

$$\text{a)} \int_1^2 (x-3)^3\,dx = -\frac{15}{4}$$

$$\text{b)} \int_{-1}^{10} \sin(x^2-1)\,dx = -0.78$$

$$\text{c)} \int_1^{1000} \frac{1}{x}\,dx = 6.91$$

A6. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 13x^2 + 30x$$

a) Bestimme für die obige Funktion die beiden folgenden Integrale:

$$1. \int_2^3 f(x)\,dx \qquad 2. \int_2^4 f(x)\,dx$$

b) Was sagen die Ergebnisse aus a) über den Verlauf des Funktionsgraphen zwischen $x = 3$ und $x = 4$ aus? (Wenn du den Teil a) nicht lösen konntest, dann geh von: $\int_2^3 f(x)\,dx = 5$ und $\int_2^4 f(x)\,dx = 3$ aus.)

Lösung:

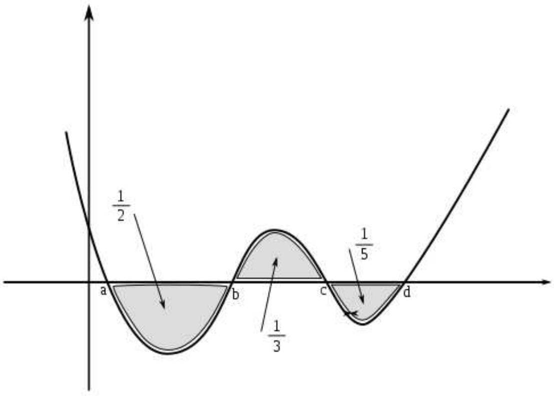
a) Es ist

$$1. \int_2^3 f(x)\,dx = \tfrac{107}{12}$$

$$2. \int_2^4 f(x)\,dx = -\tfrac{8}{3}$$

b) Der Funktionsgraph muss zwischen $x = 3$ und $x = 4$ unterhalb der x-Achse verlaufen.

A7. Gegeben ist der Graph einer Funktion $f(x)$, der mit der x-Achse die angegebenen Flächen einschließt (Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $x = a, x = b, x = c$ und $x = d$:



a) Welchen Wert hat $\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$?

b) Mit welchem Term kann die Flächenmaßzahl der vom Graph und der x-Achse eingeschlossenen Fläche berechnet werden?

Lösung:

a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \approx -0.166$

b) $-\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx - \int\limits_c^d f(x)\,dx$

A8. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^4 - 7.3x^3 + 18.72x^2 - 19.98x + 7.56$$

Welche Fläche schließt der Graph der Funktion mit den Koordinatenachsen ein?

Lösung:

Die Nullstellen der Funktion sind:

$$x = 1, \quad x = 1.2, \quad x = 2,1 \quad \text{ und } x = 3$$

Daher müssen die folgenden Integrale berechnet werden:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx 2.185$$

$$\int_1^1 .2f(x)\,dx = -0.002$$

$$\int_1 .2^2.1f(x)\,dx = 0.101$$

$$\int_2 .1^3 f(x)\,dx = -0.259$$

Die gesuchte Fläche berechnet sich daher zu:

$$2.185 + 0.002 + 0.101 + 0.259 = 2.547 \text{ FE}$$

A9. Berechne jeweils die Fläche, die von den Funktionsgraphen von $f(x)$ und $g(x)$ in den Grenzen von $x = 3$ und $x = 5$ eingeschlossen wird.

a)	$f(x) = x^3 + 20x$	$g(x) = 9x^2 + 12$
b)	$f(x) = x^3 + 34x$	$g(x) = 11x^2 + 24$

Lösung:

a) Setzt man $f(x) = g(x)$, dann ergeben sich die Lösungen $x = 1, x = 2, x = 6$. Somit haben die Funktionen im angegebenen Intervall $[3; 5]$ keinen gemeinsamen Punkt. Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^3 + 20x &= 9x^2 + 12 \\ x^3 - 9x^2 + 20x - 12 &= 0 \\ \int_3^5 x^3 - 9x^2 + 20x - 12\,dx &= -22 \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt demnach 22FE.

b) Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^3 + 34x &= 11x^2 + 24 \\ x^3 - 11x^2 + 34x - 24 &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen: $x = 1, x = 4, x = 6$. Somit muss die Fläche mit zwei Integralen berechnet werden:

$$\int\limits_3^4 x^3 - 11x^2 + 34x - 24\,dx = \frac{37}{12}$$

$$\int\limits_4^5 x^3 - 11x^2 + 34x - 24\,dx = -\frac{29}{12}$$

Die gesuchte Fläche ist daher $\frac{37}{12} + \frac{29}{12} = \frac{11}{2} = 5.5$FE groß

A10. Welchen Mittelwert hat der Funktionswert der Funktion

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-4)^2$$

zwischen den x-Werten 2 und 4? (Die Art der Berechnung muss erkennbar sein).

Lösung:

Es ist:

$$\int_2^2 (x-2)^2 \cdot (x-4)^2\,dx = \frac{16}{15}$$

Der gesuchte Mittelwert ist daher:

$$\frac{1}{4-2} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8}{15} \approx 0.5333$$

A11. Für die Zeit von 8:00 Uhr morgens bis 17:00 Uhr abends, beschreibt die Funktion:

$$w(t) = \frac{1}{10}\left[t^3 - 17t^2 + 70t\right]$$

den Zu- ($w(t) > 0$) bzw. Ablauf ($w(t) < 0$) von Wasser in ein Speicherbecken in dem sich um 8:00 Uhr $786m^3$ Wasser befinden. Dabei gibt $w(t)$ die Wassermenge in m^3/h (Kubikmeter Wasser pro Stunde an). $t = 0$ entspricht der Uhrzeit 8:00 und eine Einheit von t entspricht einer Stunde.

Tipp 1: Sieh dir auf jeden Fall den Verlauf des Graphen mit deinem GTR an!

Tipp 2: Erst denken, dann rechnen!

a) Um wieviel Uhr ist der Wasserstand im Speicherbecken maximal?

b) Wie groß ist der maximale Abfluss von Wasser in der Zeit zwischen 8:00 und 17:00 Uhr?

c) Morgens um 8:00 Uhr befinden sich im Speicherbecken 786m^3 Wasser. Wieviel Wasser ist um 17:00 Uhr in dem Becken?

Lösung:

a) Da der Graph am $t = 0$ im Positiven verläuft, ist die zweite Nullstelle von Interesse, ab der der Graph ins Negative absinkt. Diese ist $t = 7$. Somit wird der maximale Wasserstand um $8 + 7 = 15$:00 Uhr erreicht.

b) Hier ist nun das Minimum der Funktion gefragt. Der GTR berechnet es zu: $t = 8,63$, was einer Uhrzeit von 16.63, oder 16:37 Uhr entspricht.

c) Die Summe aller Zu- und Abflüsse ergibt sich aus dem Integral über die genannte Zeit:

$$\int\limits_0^9 w(t)\,dt = 34,43$$

Damit ergibt sich ein Wasserstand von $786 + 34,43 = 820,43$m^3 um 17:00 Uhr.

vfill

Ohne Hilfsmittel!

Q_1 II **1.Klausur** **Nachschreiber**

A1. Bestimme für die folgenden Funktionen eine Stammfunktion.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ b) $f(x) = (x-1)(x-3)$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 3x^2 + 1 \\ F(x) &= \frac{1}{5}x^5 - x^3 + x \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-3) \\ f(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ F(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \end{aligned}$$

A2. Bestimmt die Fläche, die vom Graphen der Funktion

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x$$

und der x-Achse eingeschlossen wird.
Lösung:
Bestimmung der Nullstellen:

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{1}{4}x &= 0 \\ x(x^2 - \frac{1}{4}) &= 0 \\ x(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) &= 0 \qquad \text{oder z.B. p-q-Formel} \\ x = 0 \vee x = -\frac{1}{2} &\vee x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bestimmung der Stammfunktion von $f(x)$ und der benötigten Werte:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^2 \\ F(-1) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \\ F(0) &= 0 \\ F(1) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Bestimmung der Integrale:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx = 0 - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$
$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

Die gesuchte Fläche ist: $A = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

A3. Gegeben sind jeweils die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Bestimme jeweils $f(g(x))$ und $g(f(x))$.

a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 1$ b) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + 1$

Lösung:

$$
\begin{array}{lll}
\text{a)} & f(g(x)) & = \sqrt{x+1} \\
 & g(f(x)) & = \sqrt{x}+1 \\
\text{b)} & f(g(x)) & = (x^2+1)^2 \\
 & g(f(x)) & = x^4+1
\end{array}
$$

A4. Gib bei den folgenden drei Aussagen an, ob es sich um eine wahre oder falsche Aussage handelt (Eine Begründung ist **nicht** erforderlich, es reicht etwa die Angabe '`a) wahr)`').

a) Der Wert des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ ist **immer** $F(b) - F(a)$

b) Wenn man das Integrationsintervall vergrößert, dann vergrößert sich auch der Wert des Integrals.

c) Will man den Mittelwert einer Funktion $f(x)$ in einem Intervall zwischen $x = a$ und $x = b$ ermitteln, dann sind die zwischen a und b liegenden Nullstellen der Funktion nicht von Interesse.

Lösung:

a) Wahr

b) Falsch

c) Wahr

A5. Bestimme die folgenden Integrale (runde ggf. auf zwei Nachkommastellen):

a) $\int\limits_1^2 (x-1)(x-2)\,dx$ b) $\int\limits_1^{10} \sqrt{x^2-1}\,dx$

Lösung:

a) $\int\limits_1^2 (x-1)(x-2)\,dx = -\frac{1}{6}$ b) $\int\limits_1^{10} \sqrt{x^2-1}\,dx = 48,25$

A6. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$$

a) Bestimme für die obige Funktion die beiden folgenden Integrale:

$$1. \int\limits_2^3 f(x)\,dx \qquad 2. \int\limits_2^4 f(x)\,dx$$

b) Was sagen die Ergebnisse aus a) über den Verlauf des Funktionsgraphen zwischen $x = 3$ und $x = 4$ aus? (Wenn du den Teil a) nicht lösen konntest, dann geh von: $\int\limits_2^3 f(x)\,dx = 5$ und $\int\limits_2^4 f(x)\,dx = 0$ aus.)

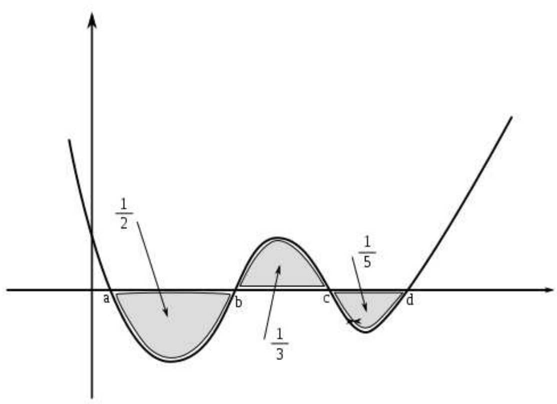
Lösung:

a) Es ist

$$1. \int\limits_2^3 f(x)\,dx = \tfrac{7}{4}$$
$$2. \int\limits_2^4 f(x)\,dx = 0$$

b) Der Funktionsgraph muss zwischen $x = 3$ und $x = 4$ unterhalb der x-Achse verlaufen und die Fläche zwischen 2 und 3 genau so groß sein, wie die zwischen 3 und 4.

A7. Gegeben ist der Graph einer Funktion $f(x)$, der mit der x-Achse die angegebenen Flächen einschließt (Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $x = a, x = b, x = c$ und $x = d$:



a) Mit welchem Term kann die Fläche berechnet werden, die der Graph der Funktion, die x-Achse und die y-Achse einschließt?

b) Welchen Wert hat $\int_a^b f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$?

Lösung:

a) $\int_0^a f(x)\,dx$

b) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = -\frac{7}{10} = -0.7$

A8. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$$

Welche Fläche schließt der Graph der Funktion mit den Koordinatenachsen ein?

Lösung:

Die Nullstellen der Funktion sind:

$$x = -2, \quad x = -1, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad \text{und } x = 2$$

Daher müssen die folgenden Integrale berechnet werden:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx &= \frac{9}{4}\\ \int_{-1}^{0} f(x)\,dx &= -\frac{11}{12}\\ \int_{0}^{1} f(x)\,dx &= \frac{11}{12}\\ \int_{1}^{2} f(x)\,dx &= -\frac{9}{4}\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche berechnet sich daher zu:

$$\frac{9}{4} + \frac{11}{12} + \frac{11}{12} + \frac{9}{4} = \frac{76}{12} = \frac{19}{3} \approx 6.33 \text{ FE}$$

A9. Berechne jeweils die Fläche, die von den Funktionsgraphen von $f(x)$ und $g(x)$ in den Grenzen von $x = 3$ und $x = 5$ eingeschlossen wird.

a)	$f(x) = x^3 + 20x$	$g(x) = 9x^2 + 12$
b)	$f(x) = x^3 + 34x$	$g(x) = 11x^2 + 24$

Lösung:

a) Setzt man $f(x) = g(x)$, dann ergeben sich die Lösungen $x = 1, x = 2, x = 6$. Somit haben die Funktionen im angegebenen Intervall $[3; 5]$ keinen gemeinsamen Punkt. Es ist

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x)\\ x^3 + 20x &= 9x^2 + 12\\ x^3 - 9x^2 + 20x - 12 &= 0\\ \int\limits_3^5 x^3 - 9x^2 + 20x - 12\,dx &= -22\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt demnach 22FE.

b) Es ist

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x)\\ x^3 + 34x &= 11x^2 + 24\\ x^3 - 11x^2 + 34x - 24 &= 0\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen: $x = 1, x = 4, x = 6$. Somit muss die Fläche mit zwei Integralen berechnet werden:

$$\int\limits_3^4 x^3 - 11x^2 + 34x - 24\,dx = \frac{37}{12}$$

$$\int\limits_4^5 x^3 - 11x^2 + 34x - 24\,dx = -\frac{29}{12}$$

Die gesuchte Fläche ist daher $\frac{37}{12} + \frac{29}{12} = \frac{11}{2} = 5.5$FE groß

A10. Welchen Mittelwert hat der Funktionswert der Funktion

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-4)^2$$

zwischen den x-Werten 2 und 4? (Die Art der Berechnung muss erkennbar sein).

Lösung:

Es ist:

$$\int_2^2 (x-2)^2 \cdot (x-4)^2\,dx = \frac{16}{15}$$

Der gesuchte Mittelwert ist daher:

$$\frac{1}{4-2} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8}{15} \approx 0.5333$$

A11. Für die Zeit von 8:00 Uhr morgens bis 17:00 Uhr abends, beschreibt die Funktion:

$$w(t) = \frac{1}{10}\left[t^3 - 17t^2 + 70t\right]$$

den Zu- ($w(t) > 0$) bzw. Ablauf ($w(t) < 0$) von Wasser in ein Speicherbecken in dem sich um 8:00 Uhr $786m^3$ Wasser befinden. Dabei gibt $w(t)$ die Wassermenge in m^3/h (Kubikmeter Wasser pro Stunde an). $t = 0$ entspricht der Uhrzeit 8:00 und eine Einheit von t entspricht einer Stunde.

Tipp 1: Sieh dir auf jeden Fall den Verlauf des Graphen mit deinem GTR an!

Tipp 2: Erst denken, dann rechnen!

a) Um wieviel Uhr ist der Wasserstand im Speicherbecken maximal?

b) Wie groß ist der maximale Abfluss von Wasser in der Zeit zwischen 8:00 und 17:00 Uhr?

c) Morgens um 8:00 Uhr befinden sich im Speicherbecken 786m^3 Wasser. Wieviel Wasser ist um 17:00 Uhr in dem Becken?

Lösung:

a) Da der Graph am $t = 0$ im Positiven verläuft, ist die zweite Nullstelle von Interesse, ab der der Graph ins Negative absinkt. Diese ist $t = 7$. Somit wird der maximale Wasserstand um $8 + 7 = 15$:00 Uhr erreicht.

b) Hier ist nun das Minimum der Funktion gefragt. Der GTR berechnet es zu: $t = 8,63$, was einer Uhrzeit von 16.63, oder 16:37 Uhr entspricht.

c) Die Summe aller Zu- und Abflüsse ergibt sich aus dem Integral über die genannte Zeit:

$$\int\limits_0^9 w(t)\,dt = 34,43$$

Damit ergibt sich ein Wasserstand von $786 + 34,43 = 820,43$m^3 um 17:00 Uhr.