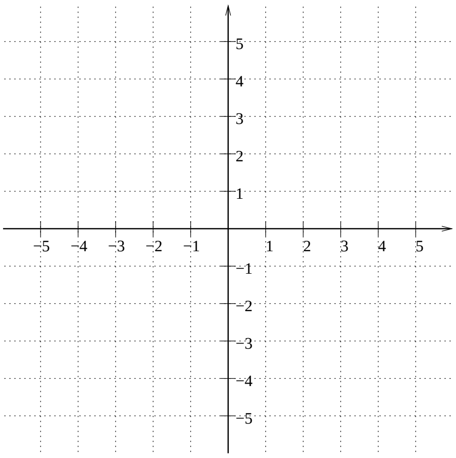
Ohne Hilfsmittel!

Q_1 I **1.Klausur** **6.10.2017**

A1. Von einer Funktion sind die folgenden Punkte bekannt:
Hochpunkte HP_1(-4/2), HP_2(2/2), Tiefpunkt TP(-1/-3).



a) Skizziere den Verlauf eines möglichen Funktionsgraphen in obiges Koordinatensystem.

b) Skizziere den Verlauf der dazu gehörigen Ableitungsfunktion mit einer anderen Farbe (**nicht** rot!) in das gleiche Koordinatensystem.

A2. Beurteile die folgenden Aussagen jeweils mit **wahr** oder **falsch**. Begründe deiner Entscheidung.

a) Wenn für eine Stelle x gilt: $f'(x) = 0$, dann muss die Ausgangsfunktion an dieser Stelle eine Hoch- oder Tiefpunkt haben.

b) Es kann eine Funktion 4. Grades geben, die drei Wendestellen besitzt.

c) An den Wendestellen einer Ableitungsfunktion muss die zweite Ableitungsfunktion ein Extremum haben.

Lösung:

a) **Falsch**, es kann dort auch ein Sattelpunkt liegen.

b) **Falsch**, sie kann höchstens 4 Nullstellen, 3 Extrema und **2 Wendestellen** haben.

c) **Wahr**, denn die Wendepunkte stellen Punkte höchster oder niedrigster Steigung dar.

A3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - x$$

(Verwende für deine Lösungen die Rückseite)

a) Bestimme alle Nullstellen der Funktion.

b) Bestimme die Wendetangente der Funktion.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} x^3 - x &= 0 \\ x(x^2 - 1) &= 0 \\ x(x+1)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind $x = 0, x = -1$ und $x = 1$.

b) Die Ableitungsfunktionen der Funktion sind:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 1 \\ f''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Eine Wendestelle muss bei $x = 0$ vorliegen, da dort $f''(0) = 0 \wedge f'''(0) = 6 \neq 0$.
Da weiterhin $f(0) = 0$, folgt für die Wendetangente: $n = 0$. Ihre Steigung ist gleich $f'(0) = -1$.
Die Gleichung der Wendetangente ist: $y = -x$.

Mit Hilfsmittel!

A4. Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

a) Welche Aussagen lassen sich zur Symmetrie machen?
b) Wie ist das Verhalten für x gegen $\pm\infty$?
c) Welche Aussagen lassen sich zu Definitions- und Wertebereich machen?
d) Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
e) Bestimme rechnerisch alle Extrem- und Wendestellen.
f) Skizziere den Graphen der Funktion in einem geeigneten Koordinatensystem.

Lösung:

a) Es ist keine Symmetrie erkennbar.

b) Es gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$.

c) $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$

d) Der y-Achsen-Abschnitt kann sofort abgelesen werden, er ist Null, da die Funktion durch den Ursprung geht.
Für die Nullstellen gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - x^2 - 2x \\ &= x(x^2 - x - 2) \\ &= x(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

Die Funktion hat also die Nullstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$.

e) Für die Ableitungsfunktionen der Funktion gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2x - 2 \\ f''(x) &= 6x - 2 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

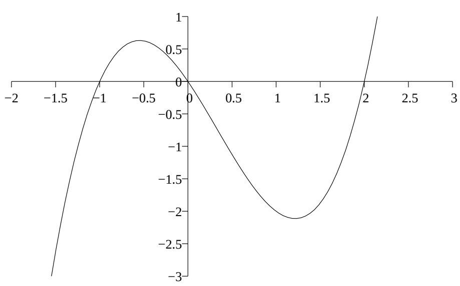
Notwendige Bedingung für das Vorliegen von Extremstellen ist: $f'(x) = 0$. Dies ist gegeben für: $x = \frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$, also $x \approx 1.22$ und $x \approx -0.55$.
Hinreichende Bedingung für das Vorliegen einer Extremstelle ist: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$. Es ist weiterhin:

$$f''(\frac{1+\sqrt{7}}{3}) \approx 5.29 > 0 \quad \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$f''(\frac{1-\sqrt{7}}{3} \approx -5.29 \quad \Rightarrow \text{Maximum}$$

Mit den Funktionswerten ergibt sich: TP(1.22/-2.11) und HP(-0.22/0.63).
In analoger Weise ergibt sich für die Wendepunkte:
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$
$f'''(\frac{1}{3}) = 6 \neq 0$
$f(\frac{1}{3}) = -\frac{20}{27} \approx -0.74$ und damit der
Wendepunkt: WP(0.33/-0.74)

f) Für die Skizze ist auch erforderlich, dass ein geeignetes Koordinatensystem gewählt wird. Es empfiehlt sich etwa: $x \in [-2; 3]$ und $y \in [-3; 1]$:



A5. Die Wendetangente der Funktion

$$f(x) = 8x^3 - 20x^2 - 2x + 5$$

schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein. Bestimme die Größe der Fläche (Die reine Angabe der Fläche reicht nicht! Notwendige Zwischenschritte oder -werte müssen mit angegeben sein. Es reichen auf zwei Stellen gerundete Zahlwerte)

Lösung:

Mit dem GTR lässt sich die x-Koordinate des Wendepunktes direkt ermitteln. Sie beträgt $x = 0.83$.
Die Steigung lässt sich näherungsweise ebenfalls mit dem GTR ermitteln, sie beträgt: $f'(0.83) = -18.67$.
Außerdem ist der Funktionswert an dieser Stelle $f(0.83) = -5.86$.
Mit der Gleichung $-5.86 = 0.83 \cdot (-18.67) + n$ erhält man für n den Wert $n = 9.64$.
Somit lautet die Tangentengleichung: $t(x) = -18.67x + 9.64$. Ihre Nullstelle liegt bei $x = 0.52$.
Die gesuchte Fläche ist daher: $A = \frac{0.52 \cdot 9.64}{2} = 2.51\text{FE}$ groß.

A6. Ein Hersteller von Fabrikanlagen hat ermittelt, dass sie sein Gewinn ziemlich genau mit der Funktion:

$$g(x) = \frac{1}{3200}\left[-63x^3 + 2526x^2 - 9600\right]$$

berechnen lässt. Dabei bedeutet eine Einheit in x-Richtung die Anzahl der hergestellten Anlagen pro Jahr und in y-Richtung den Gewinn in Millionen Euro.

a) Welcher Definitionsbereich ist für diese Funktion sinnvoll?

b) Die Funktion hat die Nullstellen: $x = 2$ und $x = 40$.
Welche unternehmerische Bedeutung hat es, wenn weniger als 2 Anlagen hergestellt werden. Welche, wenn zwischen 2 und 40 hergestellt werden und welche, wenn mehr als 40 hergestellt werden?

c) Welche Anzahl von Anlagen sollte der Hersteller optimalerweise herstellen und wie hoch ist dann sein Gewinn?

Lösung:

a) Es sind nur natürliche Zahlen sinnvoll.

b) Werden weniger als 2 oder mehr als 40 Anlagen hergestellt, dann macht das Unternehmen Verlust. Nur zwischen 2 und 40 Anlagen wird überhaupt Gewinn erzielt.

c) Das Maximum liegt per GTR bei (26.7/185). Da nur natürliche Zahlen sinnvoll sind, müssen die folgenden Werte berechnet werden: $g(26) = 184.59$ und $g(27) = 184.94$. Es ist also am besten, es werden 27 Anlagen hergestellt und dann werden 184.94 Millionen Wuro Gewinn gemacht.