2 Schulstunden (40 + 50min)

Name:

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

A1. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 2y & + & 3z & = & -4 \\ -4x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ -6x & + & 5y & - & 7z & = & 11 \end{array}$$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 3 & -4 \\ -4 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & 5 & -7 & 11 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2.5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -6.5 & 13 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow z = -2, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{2}$

A2. Begründen Sie, dass es für die folgenden Bedingungen **keine** ganzrationale Funktion geben kann.

a) Der Grad der Funktion ist 4 und sie hat bei $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$ jeweils einen Hochpunkt.

b) Alle Exponenten des Funktionsterms sind ungerade und es gilt: $f(0) = 1$.

c) Der Grad der Funktion ist 4 und alle Exponenten des Funktionsterms sind gerade. Sie hat bei $x = -3$ einen Hochpunkt und bei $x = 2$ einen Tiefpunkt.

Lösung:

a) Eine Funktion 4ten Grades hat höchstens drei Extrema. Diese können nicht alle der gleichen Art sein. (Es geht: HTH oder THT).

b) Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung und daher muss gelten $f(0) = 0$.

c) Die Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Damit müsste sie vier Extrema haben, was bei einer Funktion 4ten Grades nicht geht.

A3. Gegeben ist eine Funktionenschar durch:

$$f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 + 2ax \qquad a \neq 0$$

Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie kurz ihre Entscheidung.

a) Alle Funktionen der Schar haben **nur** die Nullstelle $x = 0$.

b) Weil a positiv wie negativ sein kann, lässt sich keine Aussage zur Symmetrie der Funktionsgraphen machen.

c) Für alle Funktionen der Schar gilt: $f_a(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

d) Die Graphen aller Funktionen der Schar gehen durch den Punkt:

$$P\left(-1/-\frac{2a^2+1}{a}\right)$$

Lösung:

a) **Wahr.** Klammert man x aus ergibt sich: $\frac{1}{a}x^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2a^2$. Dieser Ausdruck ist nicht lösbar für $a \neq 0$.

b) **Falsch.** Die Graphen sind alle punktsymmetrisch zum Ursprung.

c) **Falsch.** Das gilt nur für positive a.

d) **Wahr.** Setzt man -1 in $f_a(x)$ ein, erhält man: $-\frac{1}{a} - 2a$. Das ist gleich $-(\frac{2a^2+1}{a})$.

A4. Von einer ganzrationalen Funktion sind die folgenden Eigenschaften bekannt:

$$I : f(-1) = 5 \qquad II : f'(-1) = 0 \qquad III : f''(-1) = 0 \qquad IV : f(0) = 0$$

a) Geben Sie für jede Bedingung, oder jede Kombination von Bedingungen, an, welche Bedeutung sie für den Verlauf des Graphen hat.

b) Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen.

Lösung:

a)

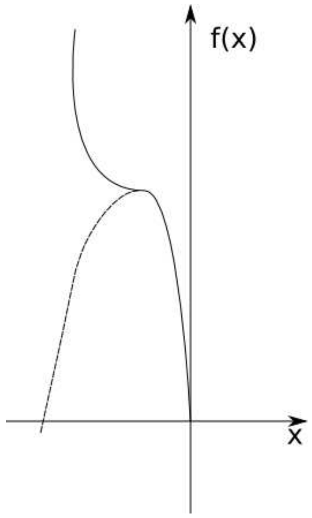
f(-1)=5 Der Graph verläuft duch den Punkt $P(-1/5)$.

f'(-1)=0 Bei $x = -1$ hat der Graph keine Steigung. Es kann eine Extremstelle oder ein Sattelpunkt vorliegen.

f"(-1)=0 Bei $x = -1$ ist der Graph nicht gekrümmt. Es kann eine Wendestelle vorliegen.
Aus der Kombination dieser Eigenschaften kann **nicht** geschlossen werden, ob bei $a = -1$ eine Extrem- oder Wendestelle vorliegt!

f(0)=0 Der Graph hat im Ursprung eine Nullstelle.

b)



2 Schulstunden (40 + 50min)

Name:

Teil 1 (mit Hilfsmittel = GTR, Formelsammlung)

A5. Steckbriefaufgaben (Runde alle Zahlergebnisse auf zwei Stellen hinter dem Komma!)

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 6ten Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft und die bei $S(-2/10)$ einen Sattelpunkt und die Nullstelle $x = 1$ hat.

b) Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 5ten Grades, die bei $A(-2/1)$ eine Wendestelle, für $x = 0$ die Wendetangente $y = 3x + 2$ und bei $x = 3$ eine waagerechte Tangente hat.

Lösung:

a)

$$f(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$$
$$f(x) = ax^6 + cx^4 + ex^2 + g$$
$$f'(x) = 6ax^5 + 4cx^3 + 2ex$$
$$f''(x) = 30ax^4 + 12cx^2 + 2e$$

$$f(-2) = 10 \rightarrow 64a + 32c + 4e + g = 10$$
$$f'(-2) = 0 \rightarrow -192a - 32c - 4e = 0$$
$$f''(-2) = 0 \rightarrow 480a + 48c + 2e = 0$$
$$f(1) = 0 \rightarrow a + c + e + g = 0$$

$$a = -\frac{2}{33} \approx -0.06 \quad c = \frac{8}{11} \approx 0.73 e = -\frac{32}{11} \approx -2.91 \quad g = \frac{74}{33} \approx 2.24$$
$$f(x) = -\frac{2}{33}x^6 + \frac{8}{11}x^4 - \frac{32}{11}x^2 + \frac{74}{33}$$

b)

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$
$$f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$$
$$f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$$

$$f(-2) = 1 - 32a + 16b - 8c + 4d - 2e + f = 1$$
$$f''(-2) = 0 \rightarrow -160a + 48b - 12c + 2d = 0$$
$$f''(0) = 0 \rightarrow 2d = 0$$
$$f'(0) = 3 \rightarrow e = 3$$
$$f(0) = 2 \rightarrow f = 2$$
$$f'(3) = 0 \rightarrow 405a + 108b + 27c + 6d + e = 0$$

$$a \approx 0.04 \rightarrow b \approx -0.14 \quad c \approx -1.06 d = 0 \quad e = 3 \quad f = 2$$
$$f(x) \approx 0.04x^5 - 0.14x^4 - 1.06x^3 + 3x + 2$$

A6. Gegeben ist eine Funktionenschar mit:

$$f_a(x) = x^3 - 3ax^2 + 2a^2x, \qquad a \neq 0$$

a) Steigt der Graph einer Funktion dieser Schar im Ursprung an oder fällt er ab?

b) Untersuche alle Funktionen der Schar hinsichtlich: Verhalten im Unendlichen, Schnittpunkt mit der y-Achse, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte. Bei den Extremstellen muss der Funktionswert nicht bestimmt werden.

c) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f_2(x), f_{-2}(x)$ und $f_1(x)$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

d) Welche Nullstellen hat die Funktion der Schar, die bei $x = 1$ ein Maximum hat?

e) Berechnen Sie die Ortskurve für die Wendepunkte.

Lösung:

a) Es ist $f_a'(x) = 3x^2 - 6ax + 2a^2$. Somit ist das Vorzeichen der Steigung im Ursprung immer positiv. Die Funktionskurve steigt an.

b)

a hat keinen Einfluss auf das Unendlichkeitsverhalten, daher gilt:

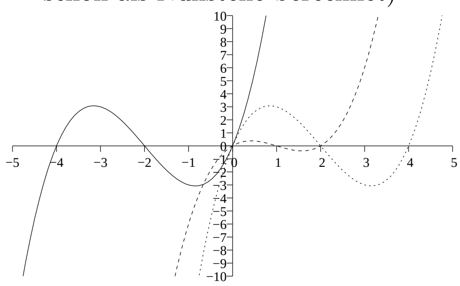
$$f_a(x) \to \infty \text{ für } x \to \infty$$
$$f_a(x) \to -\infty \text{ für } x \to -\infty$$

$f_a(0) = 0$ (gleichzeitig Nullstelle)

$$\begin{aligned} f_a(x) &= 0 \\ &= x^3 - 3ax^2 + 2a^2x \\ &= x(x^2 - 3ax + 2a^2) \\ x = 0, &\quad x = a, \quad x = 2a \end{aligned}$$

z.B. p-q-Formel

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = a \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$.
$f''(a + \frac{a}{\sqrt{3}}) = \frac{6a}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow$ HP für $a < 0$ und TP für $a > 0$.
Für $a - \frac{a}{\sqrt{3}}$ analog, aber umgekehrt.
$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$
Da $f_a'''(x) = 6 \neq 0$ muss im Punkt $(a/0)$ eine Wendestelle vorliegen (Bemerkung: $f_a(x)$-Wert wurde schon als Nullstelle berechnet)



c)

d) Das Maximum liegt (bei positivem a) bei: $a - \frac{a}{\sqrt{3}}$. Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} 1 &= a - \frac{a}{\sqrt{3}} \\ &= a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} &= a \end{aligned}$$

Aus Teilaufgabe b) ergibt sich, dass die Nullstellen bei $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ und $x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ liegen müssen.

d) Aus Teilaufgabe b) ergibt sich unmittelbar, dass die Ortskurve die x-Achse ist. (Bemerkung: Wer das erkennt, hat die Punkte verdient)