Cremer, Kalhöfer
Mathematik
16.5.2018

3 Schulstunden (35 + 100min)

Name:

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

A1. Bestimme mit den bekannten Ableitungsregeln jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $a(x) = e^{-2x+1}$ b) $b(x) = \frac{1}{(2x+1)^4}$

c) $c(x) = -3x \cdot \cos(x)$ d) $d(x) = \sqrt{x^2+3} \cdot e^{2x^2+3x}$

Lösung:

a)

$$a'(x) = -2 \cdot e^{-2x+1}$$

b)

$$b'(x) = -8 \cdot (2x+1)^{-3} = -\frac{8}{(2x+1)^3}$$

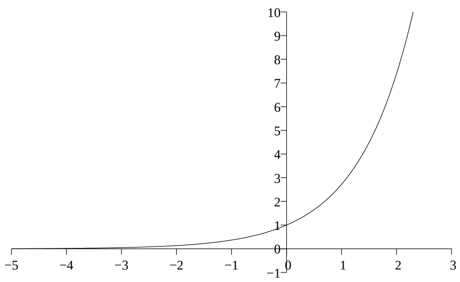
c)

$$c'(x) = -3 \cdot \cos(x) + 3x \cdot \sin(x)$$

d)

$$\begin{aligned} d(x) &= (x^2+3)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{2x^2+3x} \\ u'(x) &= (x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \\ v'(x) &= (4x+3) \cdot e^{2x^2+3x} \\ d'(x) &= (x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x^2+3x} + (4x+3) \cdot e^{2x^2+3x} \cdot (x^2+3)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

A2. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = e^x$:



Begründe, dass die Funktion

$$g(x) = 1 - e^{-x}$$

nur eine Nullstelle hat und gib diese an.

Lösung:

Der Funktionsgraph einer Funktion mit dem Funktionsterm $-e^{-x}$ entspricht dem der e-Funktion, an der x- und y-Achse gespiegelt.

Wird dieser Funktionsgraph um eine Einheit angehoben, schneidet er die x-Achse (wegen der Monotonie nur einmal!) beim Wert $x = 0$ (da $e^0 = 1$).

A3.

a) Gib eine Stammfunktion der Funktion

$$f(x) = 2x^2 + e^x - 3x$$

an.

b) Gib zwei Funktionen an, deren Mittelwert auf dem Intervall $[0; 4]$ genau den Wert 2 hat.

Lösung:

a)

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + e^x - \frac{3}{2}x^2 [+c]$$

b) Zum Beispiel die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad g(x) = \frac{1}{4}x$$

3 Schulstunden (35 + 100min)

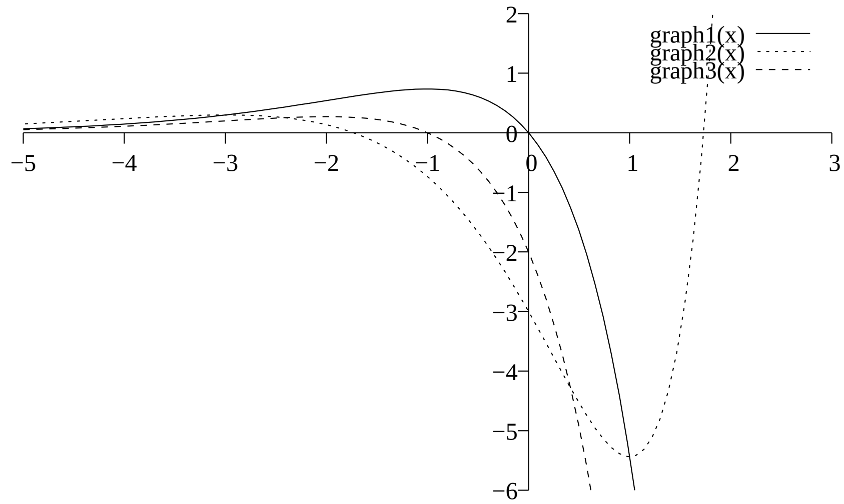
Name:

Teil 2 (mit Hilfsmittel = GTR, Formelsammlung)

Gegeben sind die Funktionen:

$$f(x) = e^x \cdot (x^2 - 3) \qquad g(x) = -2x \cdot e^x$$

Die Graphen dieser Funktionen, sowie der Graph von $g'(x)$ sind in der folgenden Abbildung dargestellt.



A4.

a) Gib an, welcher der drei Graphen zu $f(x)$ gehört und begründe deine Entscheidung.

b) Erkläre anhand dreier Merkmale, dass es sich bei `graph3` um den Graphen von $g'(x)$ handeln muss.

Lösung:

a) `graph2` ist der Graph von $f(x)$. Das ergibt sich etwa aus $f(0) = -3$, oder auch durch $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Weil nur der `graph2` diese Eigenschaften besitzt.

b) Hier können folgende Merkmal genannt werden (von denen nur drei genannt werden müssen):

- `graph1` geht durch den Ursprung. Daher muss es sich um den Graphen von $g(x)$ handeln und nur noch `graph3` bleibt für $g'(x)$ übrig.
- `graph3` verläuft im Intervall $]-\infty/-1[$ oberhalb der x-Achse und `graph1` hat in diesem Bereich eine positive Steigung.
- `graph3` verläuft im Intervall $]-1/\infty[$ unterhalb der x-Achse und `graph1` hat in diesem Bereich eine negative Steigung.
- `graph3` schneidet bei -1 die x-Achse mit negativer Steigung und `graph1` hat bei -1 einen Hochpunkt.
- `graph3` hat (ungefähr) bei -2 einen Hochpunkt und `graph1` hat bei (ungefähr) -2 eine Wendestelle.

A5.

a) Zeige, dass sich die Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ in den lokalen Extrempunkten von $f(x)$ schneiden. Zur Kontrolle: $E_1(-3/6e^{-3})$ und $E_2(1/-2e)$ sind die Schnittpunkte der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$.

b) Berechne die Gleichung der Geraden s, die durch die Schnittpunkte E_1 und E_2 der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ verläuft.

c) Bestimme die Gleichung der Geraden n, die ortogonal (senkrecht) zu s verläuft und den Graphen von $g(x)$ im Ursprung des Koordinatensystems schneidet.

Lösung:

a) Die Extremstellen von $f(x)$ liegen bei $x = -1$ und $x = 3$ (GTR).
Für die Schnittpunkte der beiden Graphen gilt:

$$\begin{aligned} e^x \cdot (x^2 - 3) &= -2x \cdot e^x \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ x &= -1 \vee x = -3 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

b) Für die Geradengleichung gilt:

$$\begin{aligned} 6e^{-3} &= m(-3) + n \\ -2e &= m + n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6e^{-3} &= -3m - 2e - m \\ -2e - m &= n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1,434 &= m \\ -4,003 &= n \end{aligned}$$

Die Gleichung lautet daher: $s(x) \approx -1.43x - 4$

c) Die Steigung der Geraden n ist der negative Kehrwert der Steigung von s, also:

$$m = -\frac{1}{-1.43} \approx 0,7$$

Die Gleichung der Geraden ist daher: $n(x) = 0.7x$
Bemerkung: Die Beziehung zu $g(x)$ ist irrelevant.

A6.

a) Berechne die Nullstellen von $f(x)$.

b) Zeige, dass der Graph von $g(x)$ für $x < -3$ stets zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse liegt.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} e^x \cdot (x^2 - 3) &= 0 \\ x^2 - 3 &= 0 \\ x &= -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

b) Bei $x = -3$ schneiden sich die Graphen von $f(x)$ und $g(x)$. Unterhalb der -3 gibt es keinen weiteren Schnittpunkt. Weiterhin gilt:
$f(-4) > g(-4)$, also muss der Graph von $g(x)$ immer unterhalb von $f(x)$ liegen.
Im betrachteten Bereich gilt: $e^x > 0$ und $-2x > 0$, daher muss der Graph von $g(x)$ oberhalb der x-Achse liegen.

A7.

a) Zeige, dass die Ableitungsfunktion von $f(x)$ mit der Differenzfunktion von $f(x)$ und $g(x)$ also der Funktion: $d(x) = f(x) - g(x)$ übereinstimmt.

b) Bestimme den Flächeninhalt der Fläche A, die von den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird.

c) Weise nach, dass $F(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Lösung:

a) Die Differenzfunktion ist:

$$e^x \cdot (x^2 - 3) - (-2x)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x$$

Für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^2 - 3) + 2x \cdot e^x \\ &= e^x(x^2 + 2x - 3) \end{aligned}$$

Die Gleichheit der beiden Funktionen ist damit gezeigt.

b) Die Nullstellen von $d(x)$ sind $x = -3$ und $x = 1$ (Siehe oben).
Da weiterhin gilt: $f'(x) = d(x)$, ist:

$$A = \left| \int_{-3}^{1} d(x)\, dx \right| = \left| [f(x)]_{-3}^{1} \right| \approx 5,7$$

Die gesuchte Fläche hat einen Inhalt von 5,7 FE.

c)

$$\begin{aligned} F'(x) &= (2x-2)e^x + (x^2-2x-1)e^x \\ &= (x^2-3)e^x \\ &= f(x) \end{aligned}$$