# 1. Klausur 4. Semester

## Mathematik Cremer

# Hilfsmittelfreier Teil

Bearbeitungszeit: 30 min.

Erinnerung an die Operatoren:
**Gib an** bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
**Bestimme** bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen.
**Berechne** bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
**Begründe** bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A1. Bestimme:

a) $\int (x^2 + x + 1)\, dx$ b) $\int (x^3 - 2x^2 + 4x - 7)\, dx$

**Lösung:**

a) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x[+c]$ b) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 7x[+c]$

A2. Gegeben sind die beiden folgenden Integrale:

1) $\int\limits_1^3 (x^2 - 4x + 3)\, dx$ 2) $\int\limits_1^4 (x^2 - 4x + 3)\, dx$

a) Gib eine Stammfunktion der Funktion in den beiden Integralen an.
b) Berechne die beiden Integralwerte.
c) Gib begründet an, was sich aus den beiden Integralwerten über den Verlauf des Funktionsgraphen sagen lässt.

**Lösung:**

a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x[+c]$
b) Hier werden die folgenden Werte gebraucht:

$$\begin{aligned}
F(1) &= \frac{1}{3} \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\
&= \frac{4}{3} \\
F(3) &= \frac{1}{3}3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \\
&= 9 - 18 + 9 \\
&= 0 \\
F(4) &= \frac{1}{3}4^3 - 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 \\
&= \frac{64}{3} - 32 + 12 \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Damit ist:

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^3 f(x)\, dx &= F(3) - F(1) \\
&= 0 - \frac{4}{3} \\
&= -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^4 f(x), dx &= F(4) - F(1) \\
&= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

c) Da der erste Wert kleiner als Null ist, muss der Graph der Funktion zwischen 1 und 3 im Wesentlichen unterhalb der $x$-Achse liegen. Zwischen 3 und 4 muss er oberhalb der $x$-Achse liegen.

A3. Berechne den Inhalt der Fläche, welche der Graph der Funktion

$$f(x) = x^2 - 8x + 12$$

mit der $x$-Achse einschließt.

**Lösung:**

Um die gesuchte Fläche bestimmen zu können müssen zuerst die Nullstellen berechnet werden. Diese sind $x = 2$ und $x = 6$. Damit ist:

$$\begin{aligned}
A &= \left| \int_2^6 (x^2 - 8x + 12)\, dx \right| \\
&= \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x \right]_2^6 \right| \\
&= \left| \frac{216}{3} - 4 \cdot 36 + 12 \cdot 6 - (\frac{8}{3} - 4 \cdot 4 + 12 \cdot 2) \right| \\
&= \left| \frac{216}{3} - 144 + 72 - \frac{8}{3} + 16 - 24 \right| \\
&= \left| \frac{208}{3} - 64 \right| \\
&= \left| -\frac{32}{3} \right| \\
&= \frac{32}{3} \text{ FE}
\end{aligned}$$

# Hilfsmittelteil

Erinnerung an die Operatoren:
**Gib an** bedeutet, dass nur das Ergebnis angegeben werden muss.
**Bestimme** bedeutet, dass der Ansatz und das Ergebnis angegeben sein müssen.
**Berechne** bedeutet, dass der Rechenweg und das Ergebnis erkennbar sein müssen.
**Begründe** bedeutet (auch im Zusammenhang mit anderen Formulierungen), dass keine Rechnung erforderlich ist, sondern eine Textantwort.

A4. Gegeben ist eine Funktion durch ihre Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

a) Zeige, dass $x = -2$, $x = 1$ und $x = 4$ Nullstellen der Funktion sind.
b) Begründe, dass die Funktion, außer den angegebenen, keine weiteren Nullstellen haben kann.
c) Berechne die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion.
d) Berechne die Gleichung der Tangente an den Wendepunkt der Funktion.
e) Bestimme den Flächeninhalt, den der Graph der Funktion mit der $x$-Achse einschließt.

**Lösung:**

a) Es ist

$$\begin{aligned} f(-2) &= -8 - 12 + 12 + 8 = 0 \\ f(1) &= 1 - 3 - 6 + 8 = 0 \\ f(4) &= 64 - 48 - 24 + 8 = 0 \end{aligned}$$

b) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades kann höchstens drei Nullstellen haben. Da diese schon identifiziert sind, kann die Funktion keine weiteren Nullstellen haben.

c) Zur Berechnung der Extrema müssen die Ableitungen bekannt sein. Diese sind:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ f''(x) &= 6x - 6 \end{aligned}$$

Die erste Ableitung hat die Nullstellen: $x = 1 - \sqrt{3} \approx -0.73$ und $x = 1 + \sqrt{3} \approx 2,73$.
Da weiterhin $f''(1 - \sqrt{3}) < 0$ und $f''(1 + \sqrt{3}) > 0$ liegt bei $x \approx -0,73$ ein Maximum und bei $x \approx 2,73$ ein Minimum vor. Durch Einsetzen in die Funktionsgleichung ergeben sich (mit gerundeten Werten):

$$HP(-0,73/10,39) \qquad TP(2,73/-10,39)$$

d) Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes ist $f''(x) = 0$. Dies ist für $x = 1$ der Fall. Da außerdem die dritte Ableitung immer ungleich Null ist, liegt bei $x = 1$ ein Wendepunkt vor. Dieser hat die Koordinaten $WP(1/0)$ (siehe oben).
Die Steigung im Wendepunkt ist: $f'(1) = -9$ und damit muss gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= -9 \cdot 1 + n \\ 9 &= n \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangenten an den Wendepunkt ist daher:

$$t(x) = -9x + 9$$

e) Die gesuchte Fläche berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^{1} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{1}^{4} f(x)\,dx \right| \\ &= \left| \frac{81}{4} \right| + \left| -\frac{81}{4} \right| \\ &= \frac{162}{4} = 40,4 \text{ FE} \end{aligned}$$

A5. Am 30.2.2021 konnte in München endlich wieder die beliebte Messe für gebrauchte Lederwaren (MgLw) in der Zeit von 8:00 Uhr morgens bis nachmittags um 18:00 Uhr stattfinden.

Schon um 11:00 Uhr befanden sich 1273 Besucher auf der Messe, die nur für Fachpublikum geöffnet ist.
Für den Zeitraum zwischen 11:00 und 16:00 Uhr verliefen die Zu- und Abgänge der Besucher näherungsweise entsprechend der Funktion

$$m(t) = 10t^3 - 410t^2 + 5540t - 24640$$

Dabei entspricht '$t$' der Uhrzeit ($t = 11$ entspricht 11:00 Uhr, etc.) und $m(t)$ der Anzahl der Besucher, die in die Messe hinein kommen ($m(t) > 0$) oder diese verlassen ($m(t) < 0$).

a) Gib die Uhrzeiten an, an denen genau so viele Besucher zur Messe kamen, wie Besucher sie verlassen haben.
b) Gib die Uhrzeit zwischen 11:00 und 16:00 Uhr an, bei der sich am meisten Besucher auf der Messe befunden haben.
c) Bestimme die Uhrzeit zu der am meisten Besucher zur Messe kamen. Wieviele Besucher waren das?
d) Bestimme dei Uhrzeit, zu der der Zustrom an Besuchern am meisten abnahm.
e) Bestimme wieviele Besucher sich um 14:00 Uhr und um 16:00 Uhr auf der Messe befanden.
f) Begründe mit dem Wert von $m(8)$ (Öffnung der Messe), dass die Funktion nicht für den gesamten Öffnungszeitraum geeignet ist.

**Lösung:**

a) Hier wird nach den Nullstellen der Funktion gefragt. Mit dem GTR ergibt sich: $t = 11$, $t = 14$ und $t = 16$.
Um 11:00 Uhr, um 14:00 Uhr und um 16:00 Uhr kamen genau so viele Besucher, wie Besucher die Messe verlassen haben.

b) Da zwischen 11 und 14 Uhr gilt: $m(t) > 0$ und zwischen 14 und 16 Uhr $m(t) < 0$, waren um 14 Uhr die meisten Besucher auf der Messe.

c) Hier ist das Maximum der Funktion gesucht. Die Ableitungsfunktion:

$$m'(t) = 30t^2 - 820t + 5540$$

hat die Nullstellen $t \approx 12,2$ und $t \approx 15.1$. Da außerdem $m''(12.2) < 0$ liegt um 12:12 Uhr (=12.2) ein Maximum vor. Der Zustrom bestand dabei aus: $m(12.2) \approx 82$. Um diese Zeit kamen also 82 Besucher zur Messe.

d) Hier ist nach der Wendestelle der Funktion gefragt. Die zweite Ableitung der Funktion: $m''(t) = 60t - 820$ hat bei $t = 13.\overline{6}$ eine Nullstelle. Da außerdem $m'''(t) \neq 0$ liegt dort auch der Wendepunkt.
Um 13:40 Uhr nahm der Zustrom am meisten ab.

e) Die Anzahlen der Besucher setzen sich zusammen aus der Anzahl um 11:00 Uhr und den Integralen von 11 bis 14, bzw. 16:

$$\begin{aligned} M &= 1273 + \int\limits_{11}^{14} m(t)\,dt \\ &= 1273 + 157,5 \\ &\approx 1430 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= 1273 + \int\limits_{11}^{16} m(t)\,dt \\ &= 1273 + 104.16 \\ &\approx 1377 \end{aligned}$$

Um 14:00 Uhr waren 1430 Besucher auf der Messe.
Um 16:00 Uhr waren 1377 Besucher auf der Messe.

f) Da $m(8) = -1440$ würde das bedeuten, dass bei Beginn schon Besucher die Messe verlassen, was nicht sinnvoll ist.