Lösungen als PDF-Datei auf: http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/12/12index.html

A1. Gegeben ist die Funktion

$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

a) Bestimme alle Nullstellen der Funktion (Hinweis: Alle Nullstellen sind ganzzahlig)
b) Bestimme die ersten drei Ableitungen der Funktion.
c) Welche Extremstellen hat die Funktion, bestimme x-Wert und $f(x)$-Wert der Extrema!
d) Bestimme alle Wendestellen der Funktion, ebenfalls wieder x und $f(x)$-Werte!
e) Skizziere den Graph der Funktion anhand deiner Ergebnisse.

Lösung:

a) Die erste Nullstelle $x = 0$ ist sofort sichtbar und damit läßt sich die Funktionsgleichung als

$f(x) = x(x^3 - 2x^2 - x + 2)$

schreiben.

Der Term

$x^3 - 2x^2 - x + 2$

hat z.B. die geratene Nullstelle $x = 1$. Durch Polynomdivision ergibt sich:

$f(x) = x(x-1)(x^2 - x - 2)$

Der Term

$x^2 - x - 2$

läßt sich durch quadratische Ergänzung zu

$(x+1)(x-2)$

zerlegen, so daß sich die Funktion schreiben läßt als

$f(x) = x(x-1)(x+1)(x-2)$

und damit hat die Funktion die Nullstellen $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ und $x = 2$.

b) Die Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6x^2 - 2x + 2 \\ f''(x) &= 12x^2 - 12x - 2 \\ f'''(x) &= 24x - 12 \end{aligned}$$

c) Zur Berechnung der Extrema muß das notwendige Kriterium $f'(x) = 0$ erfüllt sein. Aufgrund der Nullstellen läßt sich die ersten Nullstelle von $f'(x)$ leicht erraten zu $x = \frac{1}{2}$. Durch Polynomdivision ergibt sich ein quadratischer Term mit den weiteren Nullstellen $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 1,62$ und $x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx -0,62$

Bei der Überprüfung der hinreichenden Bedingung $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f''(\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{5}{4}}) &= 10 \\ f''(\tfrac{1}{2}) &= -5 \\ f''(\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}) &= 10 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Funktionsgleichung ergeben sich damit die folgenden Extremstellen:

$MIN(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} / -1)$

$MAX(\frac{1}{2} / 0,56)$

$MIN(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} / -1)$

d) Analog zur Extremwertbestimmung ergeben sich für die notwendige Bedingung $f''(x) = 0$ die Nullstellen $x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{12}} \approx -0,15$ und $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{12}} \approx 1,15$. Die Überprüfung der hinreichenden Bedingung $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$ ergibt, daß an beiden Stellen ein Wendepunkt vorliegt. Somit sind die Wendestellen:

$WP_1(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{12}} / -0,31)$

$WP_2(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{12}} / -0,31)$

e) Der sicher ergebende Graph.

A2. Bestimme von den folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung

a) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$ c) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

Lösung:

a) $f'(x) = \ln(x) + 1$

b) $f'(x) = \frac{-5}{(3x-1)^2}$

b) $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

A3. Bestimme die ersten **beiden** Ableitungen der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$

Lösung:

$f'(x) = e^x + x \cdot e^x$

$f''(x) = 2e^x + x \cdot e^x$