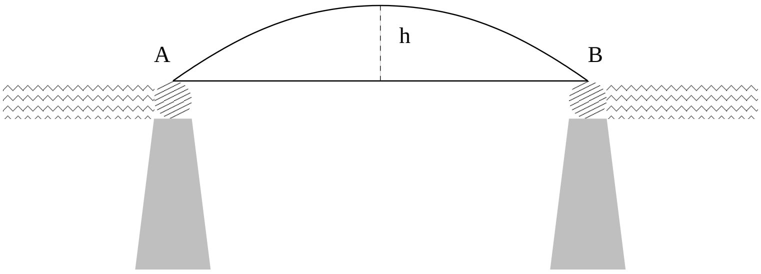
UI 1.Klausur 19.11.2003
GK M2
(CR)

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/12/12index.php4

A1. Der Trägerbogen einer Eisenbrücke soll so konstruiert werden, daß seine obere Randlinie ein symmetrisches Stück einer Parabel 2. Ordnung ist. Es soll $\overline{AB} = 49$m betragen und $h = 7$m.



a) Ermittle die Parabelgleichung, wenn im Punkt A der Koordinatenursprung liegt und die Straße der x-Achse des Koordinatensystems entspricht.

b) In welchem Abstand von der Brückenmitte hat der Bogen die die Höhe $\frac{1}{2}h$ über der Straße?

Lösung:

a) Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= 0 \\ a \cdot \left(\tfrac{49}{2}\right)^2 + b \cdot \tfrac{49}{2} + c &= 7 \\ a \cdot 49^2 + b \cdot 49 + c &= 0 \end{aligned}$$

damit ist $a = -\frac{4}{343}, b = \frac{4}{7}, c = 0$ und die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = \frac{1}{343}[-4x^2 + 196x]$

b) Es muß die Gleichung gelöst werden

$$\frac{7}{2} = \frac{1}{343}[-4x^2 + 196x]$$

Die Lösungen sind $x_1 \approx 7.18$ und $x_2 \approx 41,82$. Somit ist in einer Entfernung von ungefähr 17.32 Metern die Höhe 3.5 Meter.

A2. Eine Funktion 4. Grades hat im Ursprung des Koordinatensystems einen Wendepunkt mit der x-Achse als Wendetangente (Tangente an den Wendepunkt). Weiterhin hat sie im Punkt $A(-1/-2)$ einen Tiefpunkt. Bestimme die Funktionsgleichung.

Lösung:

Insgesamt enthält der Text die folgenden fünf Angaben:

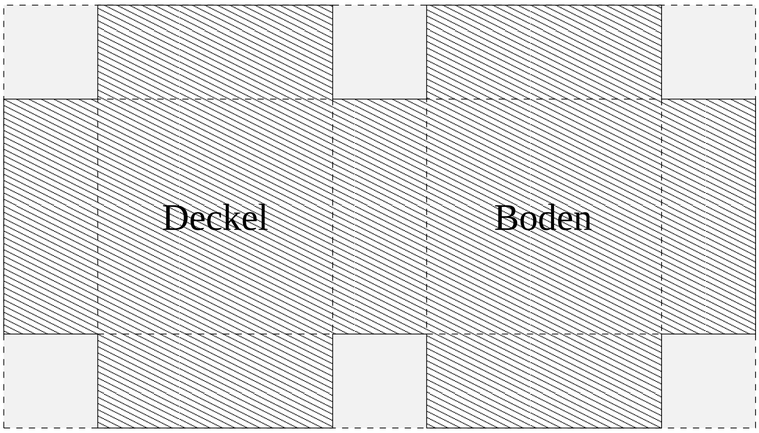
1. $f(0) = 0 \Rightarrow e = 0$
2. $f''(0) = 0 \Rightarrow c = 0$
3. $f'(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
4. $f(-1) = -2$
5. $f'(-1) = 0$

Somit reduziert sich das Gleichungssystem auf:

$$\begin{aligned} a - b &= -2 \\ -4a + 3b &= 0 \end{aligned}$$

Dieses hat die Lösungen $a = 6$ und $b = 8$. Damit lautet die Funktionsgleichung $f(x) = 6x^4 + 8x^3$

A3. Von einem rechteckigen, 40cm langen und 20cm breiten Stück Pappe werden Quadrate abgeschnitten.



Wie groß sind diese zu wählen, damit der Rest eine Schachtel mit möglichst großem Inhalt ergibt, deren Deckel sich auf drei Seiten überlappen?

Lösung:

Der Inhalt der Schachtel ist Breite(b) *times* Höhe(h) *times* Länge(l). Für diese Größen gilt (nimmt man als Abmessung der Quadrate x):

$$\begin{aligned} h &= x \\ b &= 20 - 2x \\ l &= \tfrac{40-3x}{2} \end{aligned}$$

Die Volumenfunktion ist daher $V(x) = x \cdot (20-2x) \cdot \frac{40-3x}{2}$ oder einfacher $V(x) = 3x^3 - 70x^2 + 400x$. Von dieser Funktion ist das Maximum zu bestimmen.

Notwendige Bedingung: $V'(x) = 0$ Die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt $x_1 \approx 11.78$ und $x_2 \approx 3.77$ Die erste Lösung ist offenbar unbrauchbar, daher muß die

Hinreichende Bedingung $V'(x) = 0 \wedge V''(x) \neq 0$ nur für den zweiten Wert geprüft werden. Es ist $V''(3.77) \approx -72.11$. Bei diesem Wert liegt also offenbar ein Maximum vor.

A4. Wie groß ist die Summe einer positiven Zahl und ihres Kehrwertes mindestens?

Lösung:

Die Funktion, die die genannte Summe angibt, lautet $f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$. Deren Ableitungen sind: $f'(x) = 1 - x^{-2}$ und $f''(x) = 2x^{-3}$.

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \tfrac{1}{x^2} \\ 1 &= \tfrac{1}{x^2} \\ 1 &= x^2 \\ x = 1 &\vee x = -1 \end{aligned}$$

Da nur positive Zahlen in Frage kommen, ist also für die hinreichende Bedingung nur die Zahl $x = 1$ interessant.

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(1) = 2 \cdot 1^{-3} = -2 < 0$

Bei $x - 1$ liegt also tatsächlich ein Minimum vor. Der Minimumswert ist $f(1) = 2$. Somit ist das gesuchte Minimum 2.