UI
GK M2
(CR)

3.Klausur

31.3.2004

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/12/12index.php4

A1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x \cdot (\ln(x) - 1)^2$$

a) Welchen Definitionsbereich hat die Funktion?

b) Zeige (auch unter Berücksichtigung der Ergebnisse von a), daß die Funktion nur eine Nullstelle hat.

c) Zeige, daß für die drei Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(x) - 1)^2 + 2(\ln(x) - 1) \\ f''(x) &= \frac{2(\ln(x) - 1)}{x} + \frac{2}{x} \\ f'''(x) &= -\frac{2(\ln(x) - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

d) Bestimme Extrema und Wendestellen der Funktion und zeichne aufgrund deiner Ergebnisse den Funktionsgraphen.

Lösung:

a) Durch den natürlichen Logarithmus ergibt sich die Einschränkung auf die positiven reellen Zahlen.

b) Es muß gelten:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x \cdot (\ln(x) - 1)^2 &= 0 \\ x &= 0 \vee (\ln(x) - 1)^2 = 0 \\ \ln(x) - 1 &= 0 \\ \ln(x) &= 1 \\ x &= e^1 \approx 2.7183 \end{aligned}$$

Da $x = 0$ nicht im Definitionsbereich liegt, ist $x = e^1$ einzige Nullstelle.

c) Mit der Produkt- und der Kettenregel ergibt sich

$$f'(x) = (\ln(x) - 1)^2 + 2(\ln(x) - 1)$$

Daraus ergibt sich mit der Kettenregel

$$f''(x) = \frac{2(\ln(x) - 1)}{x} + \frac{2}{x}$$

und schließlich mit der Quotientenregel

$$f'''(x) = -\frac{2(\ln(x) - 1)}{x^2}$$

d) Für die Extrema notwendig ist $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (\ln(x) - 1)^2 + 2(\ln(x) - 1) &= 0 \\ (\ln(x) - 1)[(\ln(x) - 1) + 2] &= 0 \\ (\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1) &= 0 \\ x &= e^1 \vee x = e^{-1} \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung ist $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$:

$$\frac{2(\ln(e^{-1}) - 1)}{e^{-1}} + \frac{2}{e^{-1}} \approx -5.4366$$

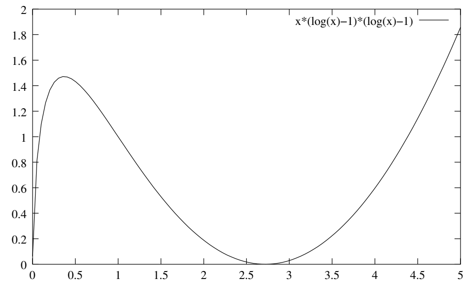
Daraus ergibt sich, daß bei $x = e^{-1}$ ein Maximum vorliegt. Dieses hat den Funktionswert $f(e^{-1}) \approx 1.4715$, der Hochpunkt liegt also bei $(0.3679/1.4715)$.
Analog ergibt sich für $x = e^1$ ein Minimum bei $(e/0)$.
Die notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Wendestelle ist $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{2(\ln(x)-1)+2}{x} &= 0 \\ 2(\ln(x)-1)+2 &= 0 \\ 2\ln(x) &= 0 \\ \ln(x) &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung für das Vorliegen einer Wendestelle ist $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$-\frac{2(\ln(1)-1)}{1} = -2$$

Daher liegt bei $x = 1$ ein Wendepunkt. Dieser hat den Funktionswert 1, womit der Wendepunkt bei $(1/1)$ liegt.
Somit ergibt sich der Graph der Funktion zu:



A2. Bestimme jeweils die Stammfunktion

a)	$f(x) = 2x^2 + 3x - 7$	b)	$f(x) = x^{13} - 2x^{17}$
c)	$f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$	d)	$f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Lösung:

a)	$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 7x + c$
b)	$F(x) = \frac{1}{14}x^{14} - \frac{1}{9}x^{18}$
c)	$F(x) = -x^{-1} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
d)	$F(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4}x^{1]over2}$

A3. Bestimme jeweils den Wert des bestimmten Integrals

a) $\int\limits_1^2 x^2 + 3dx$

b) $\int\limits_2^4 x^3 - 2x^2 + 7x - 3dx$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} \int\limits_1^2 x^2 + 3dx &= \frac{x^3}{3} + 3x|_1^2 \\ &= \frac{8}{3} + 6 - (\frac{1}{3} + 3) \\ &= \frac{7}{3} + 3 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \int\limits_2^4 x^3 - 2x^2 + 7x - 3dx &= \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x|_2^4 \\ &= 64 - \frac{128}{3} + \frac{112}{2} - 12 - (4 - \frac{16}{3} + 14 - 6) \\ &= \frac{768}{12} - \frac{512}{12} + \frac{672}{12} - \frac{144}{12} - (\frac{48}{12} - \frac{64}{12} + \frac{96}{12}) \\ &= \frac{704}{12} \end{aligned}$$

A4. Berechne die Fläche, die vom Funktionsgraphen der Funktion

$$f(x) = 2 - x - x^2$$

und der x-Achse eingeschlossen wird.
Lösung:
Zuerst müssen die Integrationsgrenzen bestimmt werden. Dies sind die Nullstellen der Funktion:

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 - x + 2 \\ &= x^2 + x - 2 \\ &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{8}{4} \\ &= (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 \\ &= (x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

Nun kann die Fläche berechnet werden

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^{1} 2 - x - x^2 dx \right| \\ &= \left| 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{1} \right| \\ &= \left| 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - (-4 - 2 + \frac{8}{3} \right| \\ &= \left| \frac{7}{6} - (-\frac{10}{3}) \right| \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

A5. Berechne die Fläche, die von den Funktionen

$$f(x) = -x^2 + 12 \text{ und } g(x) = 3$$

eingeschlossen wird.
Lösung:
Zuerst müssen wieder die Integralgrenzen berechnet werden

$$\begin{aligned} -x^2 + 12 &= 3 \\ -x^2 + 9 &= 0 \\ x^2 - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Nun kann die Fläche berechnet werden

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-3}^{3} x^2 - 9dx \right| \\ &= \left| \frac{x^3}{3} - 9x \Big|_{-3}^{3} \right| \\ &= |9 - 27 - (-9 + 27)| \\ &= |-18 - 18| \\ &= 36 \end{aligned}$$