

Lösungen als PDF-Datei unter

<http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/12/12index.php4>

A1. Bilde für die folgenden Vektoren jeweils:  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$  und  $3 \cdot \vec{a}$

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

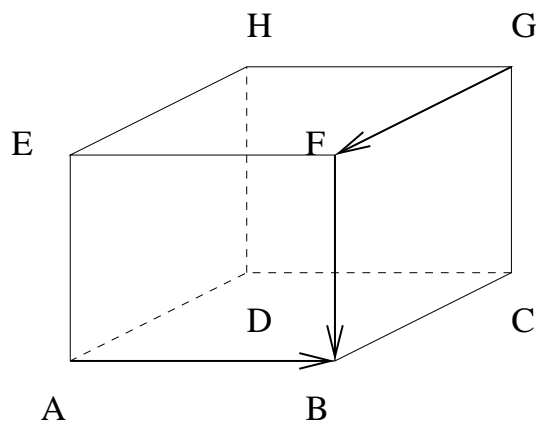
**Lösung:**

Es ist:

a)  $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 3 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 3 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

A2. Gegeben ist die folgende Figur:



Hier bei seien  $\vec{a} = \vec{AB}$ ,  $\vec{b} = \vec{FB}$  und  $\vec{c} = \vec{GF}$ . Drücke die folgenden Strecken als Summe/Differenz von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus.

- a)  $\vec{EC}$   
b)  $\vec{HC}$   
c)  $\vec{HB}$

**Lösung:**

- a)  $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$   
b)  $\vec{a} + \vec{b}$   
c)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

A3. Untersuche die folgenden Vektorgruppen jeweils auf Lineare Abhängigkeit.

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$       b)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$       d)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

- a) Offensichtlich ist  $(-2) \cdot \vec{a} = \vec{b}$ , daher sind die Vektoren linear abhängig.  
b) Für die  $x$ -Komponente der Vektoren gilt:  $-3 \cdot (-1) = 3$ . Die  $y$ -Komponenten sind allerdings gleich und daher sind die Vektoren nicht linear abhängig.

c) Das Gleichungssystem  $a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c} = \vec{0}$  Führt zu folgender Rechnung:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Da das Gleichungssystem nur die Lösungen  $a = 0$ ,  $b = 0$  und  $c = 0$  hat, sind die Vektoren linear unabhängig.

d) Analog zu c) erhält man hier als Ergebnis des Gaußschen Algorithmus:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat also unendlich viele Lösungen und daher sind die Vektoren linear abhängig.

A4. Gegeben seien die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie ist ein vierter Vektor  $\vec{d}$  zu wählen, damit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  und  $\vec{d}$  eine geschlossene Vektorkette bilden?

**Lösung:**

Für den Vektor muß gelten, daß

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$$

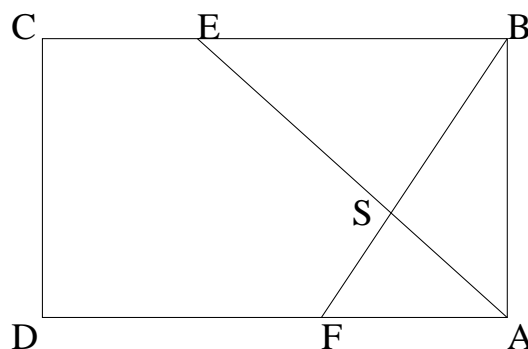
Da nun

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

muß für den Vektor  $\vec{d}$  gelten:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A5. In der folgenden Figur:



Teilt der Punkt  $E$  die Seite  $BC$  im Verhältnis  $2 : 1$  und der Punkt  $F$  die Seite  $AD$  im Verhältnis  $2 : 3$ . In welchem Verhältnis teilen sich die Strecken  $AE$  und  $BF$ ? Die Seite  $AB$  soll dabei durch den Vektor  $\vec{a}$  und die Seite  $BC$  durch den Vektor  $\vec{b}$  ausgedrückt werden.

**Lösung:**

Wählt man z.B. den Vektorzug:  $\vec{AS} + \vec{SF} + \vec{FA}$ , dann ergibt sich die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} 0 &= r \cdot \left(\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + s \cdot \left(-\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) - \frac{2}{5}\vec{b} \\ &= r\vec{a} + r\frac{2}{3}\vec{b} - s\vec{a} + s\frac{2}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{b} \\ &= r\vec{a} - s\vec{a} + r\frac{2}{3}\vec{b} + s\frac{2}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{b} \\ &= \vec{a}(r - s) + \vec{b}\left(r\frac{2}{3} + s\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\right) \end{aligned}$$

Da die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  offensichtlich linear unabhängig sind, muß gelten:

$$\begin{aligned} r - s &= 0 \\ \frac{2}{3}r + \frac{2}{5}s - \frac{2}{5} &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen:  $r = \frac{3}{8}$  und  $s = \frac{3}{8}$ . Somit werden die Strecken jeweils im Verhältnis 5 : 3 geteilt.

A6. Untersuche, ob der angegebene Punkt auf der Geraden/in der Ebene liegt.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & P(7/4/2), \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{b)} \quad & P(8/7/3), \quad e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Lösung:**

a) Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}$$

Dies führt mit dem Gauß-Algorithmus zu

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$$

Insofern ist der Rang der homogenen Matrix gleich dem Rang der inhomogenen Matrix gleich der Anzahl der Variablen. Das Gleichungssystem hat also genau eine Lösung und damit liegt der Punkt auf der Geraden.

b) Hier ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}$$

Dies führt mit dem Gauß-Algorithmus zu

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Der Rang der homogenen Matrix ist also zwei, der Rang der inhomogenen Matrix drei. Das Gleichungssystem ist also nicht lösbar und daher liegt der Punkt nicht in der Ebene.

A7. Untersuche jeweils, wie die Geraden zueinander liegen (schneidend, parallel, identisch, windschief). Wenn sie sich schneiden, dann berechne den Schnittpunkt. Gib außerdem zu jedem Gleichungssystem den Rang der homogenen, den Rang der inhomogenen Matrix und den Freiheitsgrad an.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{b)} \quad & g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Lösung:**

a) Das Gleichungssystem  $g_1 = g_2$  lautet:

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem führt mit dem Gauß-Algorithmus zu

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Der Rang der homogenen Matrix ist also gleich dem Rang der inhomogenen Matrix gleich der Anzahl der Variablen gleich Zwei. Somit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, was bedeutet, daß die Geraden sich schneiden. Setzt man z.B. den Wert von  $\lambda = 2$  in die erste Gleichung ein, erhält man den Ortsvektor des Schnittpunkts:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Das sich hier ergebende Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}$$

löst sich zu

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

auf. Da der Rang der homogenen Matrix gleich dem Rang der inhomogenen Matrix gleich Eins, die Anzahl der Variablen aber Zwei ist, hat das Gleichungssystem einen Freiheitsgrad und daher unendlich viele Lösungen. Die Geraden sind also identisch.