UI 1.Klausur 16.11.2004
GK M2
(CR)

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/12/12index.php4

A1. Beilde von den folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitungsfunktion und fasse diese soweit wie möglich zusammen.

a) $f(x) = e^{-x} \cdot \sin(x)$ b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

c) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \ln(x)$ d) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

Lösung:

a) $f'(x) = e^{-x}(\cos(x) - \sin(x))$

b) $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$

c) $f'(x) = 2x\ln(x) + \frac{x^2-1}{x}$

d) $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \frac{1}{1-x^2}$

A2. Bilde jeweils die ersten drei Ableitungen!

a) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ b) $f(x) = (e^x - 2)^2$

Lösung:

a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

$f''(x) = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$

$f'''(x) = \frac{-4x(x^2-1)+4x(2x^2+2)}{(x^2-1)^3}$

b) $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x$

$f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x$

$f'''(x) = 8e^{2x} - 4e^x$

A3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = [\ln(x)]^2 - 2\ln(x)$$

a) Bestimme den Definitionsbereich der Funktion. Begründe deine Angabe.
b) Wie verhält sich der Funktionsgraph an den '*Enden*' des Definitionsbereichs?
c) Welche Nullstellen hat die Funktion?
d) Zeigen, daß für die dritte Ableitung gilt:

$$f'''(x) = \frac{4\ln(x) - 10}{x^3}$$

e) Berechne alle Extremstellen der Funktion.
f) Berechne alle Wendestellen der Funktion.
g) Zeichne aufgrund deiner Ergebnisse den Graph der Funktion vom rechten Rand des Definitionsbereichs bis eine Einheit links vom größten ermittelten Ergebnis.

Lösung:

a) Der Definitionsbereich der Funktion ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}^{>0}$, denn er wird nur durch den Logarithmus eingeschränkt.
b) Es sind zwei Grenzwerte zu betrachten:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

und

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

c) Es ist die folgende Gleichung zu lösen:

$$\begin{aligned} 0 &= [\ln(x)]^2 - 2\ln(x) \\ &= \ln(x)(\ln(x) - 2) \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die beiden Gleichungen: $\ln(x) = 0$ und $\ln(x) - 2 = 0$. Diese haben die Lösungen: $x = 1$ und $x = e^2 \approx 7,39$

d) Für die Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= [\ln(x)]^2 - 2\ln(x) \\ f'(x) &= \frac{2\ln(x)}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2\ln(x) - 2}{x} \\ f''(x) &= \frac{2 - (2\ln(x) - 2)}{x^2} = \frac{4 - 2\ln(x)}{x^2} \\ f'''(x) &= \frac{-2x - 2x(4 - 2\ln(x)}{x^4} = \frac{4\ln(x) - 10}{x^3} \end{aligned}$$

e) Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums ist $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{2\ln(x) - 2}{x} &= 0 \\ 2\ln(x) - 2 &= 0 \\ 2\ln(x) &= 2 \\ \ln(x) &= 1 \\ x &= e \approx 2,72 \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Extremums ist: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(e) &= \frac{4-2}{e^2} \\ &= \frac{2}{e^2} \approx 0,27 > 0 \end{aligned}$$

An der Stelle $x = e$ liegt also ein Minimum vor. Da $f(e) = -1$ liegt der Tiefpunkt bei $TP(e/-1)$.

f) Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes ist $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{4 - 2\ln(x)}{x^2} &= 0 \\ 4 - 2\ln(x) &= 0 \\ 4 &= 2\ln(x) \\ 2 &= \ln(x) \\ e^2 &= x \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes ist $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(e^2) &= \frac{4\ln(e^2) - 10}{e^6} \\ &= \frac{-2}{e^6} \approx -0,005 < 0 \end{aligned}$$

An der Stelle $x = e^2$ liegt also ein Wendepunkt vor. Da $f(e^2) = 0$ ist der Wendepunkt an der Stelle $WP(e^2/0)$.

g) Im Bereich von 0 bis ungefähr 9 sieht der Graph der Funktion wirklich **schön** aus.