UI 2.Klausur 18.1.2005
GK M2
(CR)

Lösungen als PDF-Datei unter

http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/12/12index.php4

A1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$$

a) Gib den Definitionsbereich der Funktion an.

b) Ermittle durch geschicktes Vorgehen, wie sich die Funktion an der linken Grenze des Definitionsbereichs verhält.

c) Berechne die Nullstelle(n) der Funktion (die berechenbar sind!)

d) Weise nach, daß die Funktion die folgenden Ableitungsfunktionen hat:
$f'(x) = x + 2x \cdot \ln(x)$
$f''(x) = 3 + 2 \cdot \ln(x)$
$f'''(x) = \frac{2}{x}$

e) Bestimme alle Extrema der Funktion.

f) Bestimme alle Wendestellen der Funktion.

Lösung:

a) Der Definitionsbereich wird nur durch den Logarithmus eingeschränkt, daher ist: $\mathbb{D} = \mathbb{R}^{>0}$.

b) Der Grenzwert läßt sich nicht so einfach ermitteln, da x^2 gegen Null und $\ln(x)$ gegen minus Unendlich strebt und nicht unmittelbar erkennbar ist, wie sich das auf das Produkt auswirkt. Setzt man allerdings einige 'kleine' Zahlen ein, ergibt sich: $\lim\limits_{x \to 0} = 0$

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} & 0 = x^2 \cdot \ln(x) \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = 0 \lor \ln(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \lor x = 1 \end{aligned}$$

Da $x = 0$ nicht im Definitionsbereich liegt, hat die Funktion nur die Nullstelle $x = 1$.

d) Für die Ableitungen gilt:

$$\begin{array}{rll} f(x) & = x^2 \cdot \ln(x) & \\ & u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ & v(x) = \ln(x) & v'(x) = \frac{1}{x} \\ f'(x) & = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} & \\ & = 2x \cdot \ln(x) + x & \\ & & \\ f'(x) & = 2x \cdot \ln(x) + x & \\ & u(x) = 2x & u'(x) = 2 \\ & v(x) = \ln(x) & v'(x) = \frac{1}{x} \\ f''(x) & = 2\ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 & \\ & = 2\ln(x) + 3 & \\ & & \\ f'''(x) & = \frac{2}{x} & \end{array}$$

e) Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums ist: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} & 0 = x + 2x \cdot \ln(x) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = x(1 + 2\ln(x)) \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \lor 1 + 2\ln(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \lor \ln(x) = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \lor x = e^{-0,5} \approx 0,6065 \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung ist: $f'(x) = 0 \land f''(x) \neq 0$

$$f''(e^{-0,5}) = 3 + 2 \cdot -0,5 = 3 - 1 = 2 > 0$$

Die Funktion hat also an dieser Stelle ein Minimum. Da weiterhin gilt: $f(e^{-0,5}) \approx -0,1839$, liegt das Minimum bei: $M(0,6065/-0,1839)$.

f) Die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes ist: $f''(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
& & 0 &= 3 + 2\ln(x) \\
&\Leftrightarrow & -\frac{3}{2} &= \ln(x) \\
&\Leftrightarrow & e^{-1,5} &= x \approx 0,2231
\end{aligned}
$$

Die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes ist: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f'''(e^{-1.5}) = \frac{2}{0,2231} > 0$$

Und da weiterhin gilt: $f(e^{-1.5}) \approx -0,0747$ liegt der Wendepunkt bei: $W(0,2231/-0,0747)$

A2. Bestimme die folgenden Integrale:

a)	$\int 5x^4 - 1\,dx$	b)	$\int (x-2)^2\,dx$	c)	$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x}\,dx$
d)	$\int_1^6 \frac{x^2}{2}\,dx$	e)	$\int_0^{32} \frac{1}{5}\sqrt[5]{x}\,dx$	f)	$\int_{-2}^{1} 4x^3 - x\,dx$

Lösung:

a) $\int 5x^4 - 1\,dx = x^5 - x$

b) $\int (x-2)^2\,dx = \int x^2 - 4x + 4\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$

c) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x}\,dx = \int x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

d)

$$
\begin{aligned}
\int_1^6 \frac{x^2}{2}\,dx &= \left[\frac{x^3}{6}\right]_1^6 \\
&= 26 - \frac{1}{6} \\
&= \frac{215}{6}
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{32} \frac{1}{5}\sqrt[5]{x}\,dx &= \left[\frac{1}{6}x^{\frac{6}{5}}\right]_0^{32} \\
&= \frac{64}{6} - 0 \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} 4x^3 - x\,dx &= \left[x^4 - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} \\
&= 1 - \frac{1}{2} - (16 - 2) \\
&= \frac{1}{2} - 14 \\
&= -\frac{27}{2}
\end{aligned}
$$

A3. Bestimme die Fläche zwischen Funktionsgraph, x-Achse und den angegebenen Grenzen a und b:

a) $f(x) = x^2 + 3x + 5, \quad a = 0, b = 1$ b) $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad a = 0, b = 2$

Lösung:

a) Für die Nullstellen gilt:

$$
\begin{aligned}
& & 0 &= x^2 + 3x + 5 \\
&\Leftrightarrow & 0 &= x^2 + 3x + (\frac{3}{2})^2 - 1,5^2 + 5 \\
&\Leftrightarrow & 0 &= (x + \frac{3}{2})^2 + 2,75
\end{aligned}
$$

Die Funktion hat also keine Nullstellen. Daher ist die Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^1 x^2 + 3x + 5\,dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5x \right]_0^1 \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 5 - 0 \right| \\ &= \left| \frac{41}{6} \right| \\ &= \frac{41}{6} \text{ FE} \end{aligned}$$

b) Für die Nullstellen gilt:

$$\begin{aligned} & 0 = x^2 - 4x + 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = (x-2)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = (x-1)(x-3) \end{aligned}$$

Im Integrationsintervall liegt also die Nullstelle $x = 1$. Die Fläche berechnet sich daher zu:

$$\begin{aligned} A &= \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^2 \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} - 2 + 3 - 0 \right| + \left| \frac{8}{3} - 8 + 6 - (\frac{1}{3} - 2 + 3 \right| \\ &= \left| \frac{4}{3} \right| + \left| \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \right| \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \\ &= 2 \text{ FE} \end{aligned}$$

A4. Die Graphen der beiden folgenden Funktionen schneiden sich. Berechne die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen.

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = 5$$

Lösung:
Zuerst müssen die x-Werte der Schnittpunkte berechnet werden, die dann auch Integrationsgrenzen werden:

$$\begin{aligned} & x^2 + 1 = 5 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Man könnte nun erste ddie Fläche von $f(x)$ zwischen 2 und -2 berechnen und dann das Gleiche für $g(x)$, um dann die Flächen voneinander zu subtrahieren. Da aber für die Integration die Summenregel gilt, kann die Subtraktion auch vorher ausgeführt werden und es gilt:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^2 x^2 - 4\,dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{x^3}{4} - 4x \right]_{-2}^2 \right| \\ &= |2 - 8 - (-2 + 8)| \\ &= |-6 - 6| \\ &= 12 \text{ FE} \end{aligned}$$