UI
GK M2
(CR)

3.Klausur

15.3.2005

Lösungen als PDF-Datei unter
http://fritz.rmi.de/schule/mathematik/12/12index.php4

Integralrechnung

A1. Welche Fläche schließt die Funtkion

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

mit der x-Achse ein?
Lösung:
Zunächst müssen die Nullstellen der Funktion berechnet werden. Als erste Nullstelle errät man leicht: $x = 1$. Die Polynomdivision ergibt:

$$(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) \div (x - 1) = x^2 - 6x + 8$$

Die quadratische Ergänzung ergibt dann insgesamt:

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-4)$$

Die Integrationsgrenzen sind also einmal 1 und 2 und dann 2und 4. Die Fläche berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_1^2 f(x)dx\right| + \left|\int_2^4 f(x)dx\right| \\ &= \left|[\frac{x^4}{4} - \frac{7}{3}x^3 + 7x^2 - 8x]_1^2\right| + \left|[\frac{x^4}{4} - \frac{7}{3}x^3 + 7x^2 - 8x]_2^4\right| \\ &= \left|\frac{1}{4} - \frac{7}{3} + 7 - 8 - (4 - \frac{56}{3} + 28 - 16)\right| + \left|-\frac{16}{3} - (-\frac{8}{3})\right| \\ &= \left|\frac{5}{12}\right| + \left|-\frac{8}{3}\right| \\ &= \frac{37}{12} \text{ FE} \end{aligned}$$

Vektorrechnung

A2. Welchen Wert muß a haben, damit die angegebene Gleichheit stimmt?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:
$a = 2$

A3. Berechne:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

A4. Berechne

$$\text{a)} \quad 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \quad 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

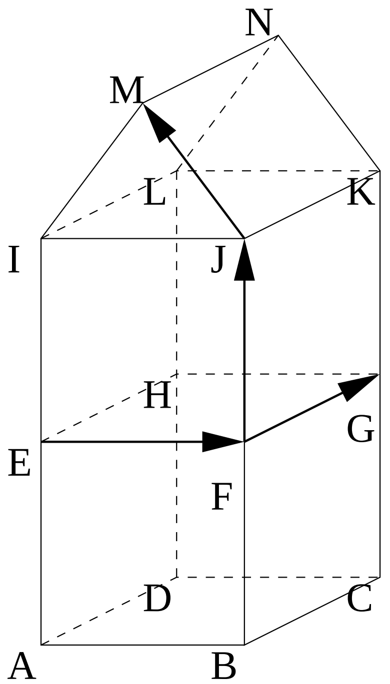
Lösung:

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\quad \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}$$

A5. Gegeben sind die Punkte: $A(0/0/0)$, $B(4/2/1)$, $C(3/-2/5)$ und $D(7/2/-8)$. Drücke die Seiten und die Diagonalen des Vierecks als Vektoren aus.
Lösung:

$$\begin{aligned}
AB &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
BC &= -\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \\
CD &= -\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix} \\
DA &= -\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \\
AC &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
BD &= -\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A6. Gegeben ist die folgende Figur:



Es gelte: $\vec{EF} = \vec{s}$, $\vec{FG} = \vec{b}$, $\vec{FJ} = \vec{c}$ und $\vec{JM} = \vec{d}$.
Drücke mit den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ die folgenden Verbindungen aus: $\vec{EK}, \vec{AK}, \vec{NE}$ und $\vec{BM}$.
Lösung:

$$\begin{aligned}
\vec{EK} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\
\vec{AK} &= \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} \\
\vec{NE} &= -\vec{d} - \vec{c} - \vec{b} - \vec{a} \\
\vec{BM} &= 2\vec{c} + \vec{d}
\end{aligned}$$

A7. Untersuche die folgenden Gruppen von Vektoren auf lineare Abhängigkeit:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 32 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Der zweite Vektor ist das -2-fache des ersten, die Vektoren sind linear abhängig.

b) Hier lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die Vektoren sind daher linear abhängig.

c) Hier lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -18 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -18 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat nur die Lösung $a = 0$, $b = 0$ und $c = 0$, die Vektoren sind also linear unabhängig.

d) Es kann maximal 3 linear unabhängige 3-dimensionale Vektoren geben, die Vektoren sind also linear abhängig.

e) Hier lautet das Gleichungssystem:

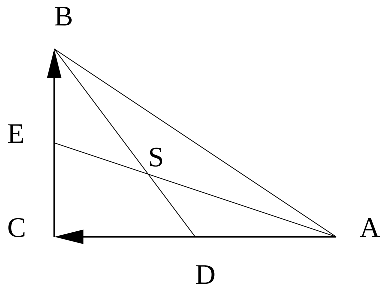
$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 1 & 6 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
\\
1 & 2 & 1 & 6 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\
0 & -4 & -1 & -10 & 0 \\
\\
1 & 2 & 1 & 6 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4 & -1 & -10 & 0
\end{array}$$

An der dritten Zeile ist zu sehen, daß das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. Die Vektoren sind also linear abhängig.

A8. In welchem Verhältnis teilen sich zwei Seitenhalbierende in einem Dreieck? Anleitung: Zeichne ein beliebiges Dreieck mit den Seiten a, b, c und zwei Seitenhalbierende (Strecke von einem Dreieckspunkt zur Mitte der gegenüber liegenden Seite). Bezeichne dann zwei Seiten des Dreiecks als Vektoren (z.B. $a = /veca$ und $b = \vec{b}$)

Lösung:

Die Skizze könnte z.B. folgendermaßen aussehen:



Es soll gelten: $\vec{CB} = \vec{a}$ und $\vec{AC} = \vec{b}$. Ein geschlossener Vektorzug, der durch S geht wäre dann z.B.: $\vec{AS} + \vec{SD} + \vec{DA}$:

$$\begin{aligned}
\vec{AS} + \vec{SD} + \vec{DA} &= r(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}) + s(-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) + \frac{1}{2}(-\vec{b}) \\
&= r\vec{b} + \frac{1}{2}r\vec{a} - s\vec{a} - \frac{1}{2}s\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} \\
&= \frac{1}{2}r\vec{a} - s\vec{a} + r\vec{b} - \frac{1}{2}s\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} \\
&= \vec{a}(\frac{1}{2}r - s) + \vec{b}(r - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, müssen die Faktoren gleich Null sein, es gilt also:

$$\begin{array}{ccccc}
I & \frac{1}{2}r - s & = & 0 \\
II & r - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} & = & 0 \\
\\
I & s & = & \frac{1}{2}r \\
II & r - \frac{1}{4}r = \frac{1}{2} & & \\
\\
I & s & = & \frac{1}{2}r \\
II & \frac{3}{4}r & = & \frac{1}{2} \\
\\
I & s & = & \frac{1}{2}r \\
II & r & = & \frac{2}{3}
\end{array}$$

Es ist also $r = \frac{2}{3}$ und damit $s = \frac{1}{3}$ und damit ist das Teilungsverhältnis 1:2