Jgst. 12/I — 1.Klausur — 20.10.2011

A1. Bestimme von den folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitungsfunktion.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & f(x) = x \cdot \ln(x) & \text{b)} & f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \\ \text{c)} & f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{d)} & f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} \end{array}$$

Lösung:

a)
$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x) & v'(x) = \frac{1}{x} \\ f'(x) = \ln(x) + 1 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} u(x) = x^2 - 1 & u'(x) = 2x \\ v(x) = x^2 + 1 & v'(x) = 2x \\ f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} & \\ f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} i(x) = \frac{1}{x} & i'(x) = -x^{-2} \\ \ddot{a}(z) = \cos(z) & \ddot{a}'(z) = -\sin(z) \\ f'(x) = \sin(x^{-1}) \cdot x^{-2} & \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{lll} i(x) = \frac{x}{x-1} & i'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} & \\ & u(x) = x & u'(x) = 1 \\ & v(x) = x - 1 & v'(x) = 1 \\ \ddot{a}(z) = \sqrt{z} & \ddot{a}'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} & \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x-1}}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} & & \end{array}$$

A2. Bestimme die ersten drei Ableitungen von $f(x) = (x^2-1)e^x$ und fasse jeweils zusammen!
Lösung:

$$\begin{array}{lll} & u(x) = x^2 - 1 & u'(x) = 2x \\ & v(x) = e^x & v'(x) = e^x \\ f'(x) & = 2x \cdot e^x + e^x \cdot (x^2 - 1) & \\ f'(x) & = e^x \cdot (x^2 + 2x - 1) & \\ & u(x) = e^x & u'(x) = e^x \\ & v(x) = x^2 + 2x - 1 & v'(x) = 2x + 2 \\ f''(x) & = e^x \cdot (x^2 + 2x - 1) + (2x + 2) \cdot e^x & \\ f''(x) & = e^x \cdot (x^2 + 4x + 1) & \\ & u(x) = e^x & u'(x) = e^x \\ & v(x) = x^2 + 4x + 1 & v'(x) = 2x + 4 \\ f'''(x) & = e^x \cdot (x^2 + 4x + 1) + e^x \cdot (2x + 4) & \\ f'''(x) & = e^x(x^2 + 6x + 5) & \end{array}$$

A3. Für eine Schraubenfabrik hat sich gezeigt, dass die Einkünfte pro Anzahl von produzierten Schrauben zunächst ansteigt, um dann irgendwann wieder abzufallen. Eine Consultingfirma stellt fest, dass sich die Einkünfte mit der Funktion

$$e(x) = x \cdot e^{-2x}$$

angeben lässt, wobei eine Einheit von x einer Million produzierter Schrauben entspricht und eine Einheit von y einer Million € an Einkünften.

a) Weise nach, dass die Einkünfte tatsächlich mit der ersten produzierten Schraube **beginnen**.
b) Berechne bei welcher Schraubenzahl die Firma die maximalen Einkünfte hat.
c) Nach Erreichen der maximalen Einkünfte nehmen diese zunächst immer stärker ab. Ab einem gewissen Punkt wird der Rückgang der Einkünfte wieder langsamer. Berechne diesen Punkt.
d) Mit welchen Einkünften kann die Firma rechnen, wenn sie ihre Produktion immer weiter steigert?

e) Die Firma hat Kosten in Höhe von 100 000€ , unabhängig von der Anzahl der hergestellten Schrauben[1]. Skizziere aufgrund deiner Berechnungen den Graph der Funktion und lies von dieser Skizze ab, in welchem Produktionsbereich die Firma Gewinn macht.

Lösung:

a) Hier muss nachgewiesen werden, dass bei $x = 0$ eine Nullstelle der Funktion liegt und dass sie rechts von der Null im positiven Bereich liegt:

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & = & x \cdot e^{-2x} \quad | \div e^{-2x} \text{ da } e^{-2x} > 0 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & x \end{array}$$

Da außerdem gilt, dass $f(1) \approx 0.14$ liegen die Werte rechts von Null alle im positiven Bereich.

b) Hier ist das Maximum der Einkünfte gefragt. Dazu müssen zunächst die ersten beiden Ableitungen berechnet werden:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & (1-2x)e^{-2x} \\ f''(x) & = & (4x-4)e^{-2x} \end{array}$$

Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Maximums ist: $f'(x) = 0$:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (1-2x)e^{-2x} \quad | \div e^{-2x} \text{ da } e^{-2x} > 0 \\ 0 & = & 1-2x \\ x & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Maximums ist: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$: Es ist $f''(0.5) \approx -0.74$ und daher liegt bei einer Anzahl von einer halben Million Schrauben das Maximum der Einkünfte (Die Höhe der Einkünfte war nicht gefragt).

c) Hier wird nach dem Wendepunkt gefragt. Dazu muss noch die dritte Ableitung berechnet werden:

$$f'''(x) = (12-8x)e^{-2x}$$

Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes ist $f''(x) = 0$:

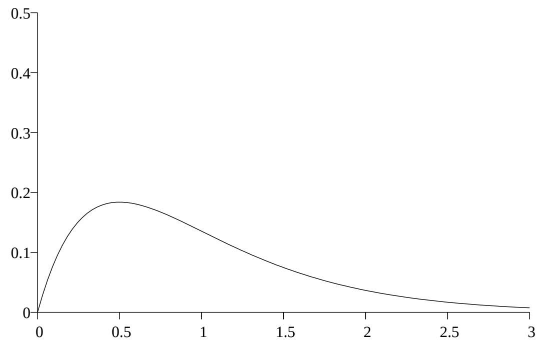
$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (4x-4)e^{-2x} \quad | \div e^{-2x} \text{ da } e^{-2x} > 0 \\ 0 & = & 4x-4 \\ x & = & 1 \end{array}$$

Weiterhin ist die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$. Da $f'''(1) \approx 0.54$ liegt ab einer Million Schrauben damit rechnen, dass sich die Einkünfte wieder langsamer verringern.

d) Hier ist nach dem Verhalten im positiv-unendlichen gefragt. Durch Einsetzen erhält man:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

e) Für die Skizze ergibt sich folgendes:



Man kann erkennen, dass bei ≈ 0.13 und bei ≈ 1.27 der Wert von 100 000€ erreicht wird.

A4. Leite für alle Funktionen der Form: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ eine Ableitungsregel her.

Lösung:

Zunächst kann man die Funktion in der Form: $f(x) = u(v \cdot w)$ schreiben. Damit ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} [v \cdot w]' & = & v'w + w'v \\ f' & = & u' \cdot (v \cdot w) + [v'w + w'v]u \\ & = & u'vw + uv'w + uvw' \end{array}$$

[1] Ja, ich **weiß**, dass dies unwahrscheinlich ist.