Jgst. 12/II 1.Klausur 15.3.2012

A1. Zeige, dass die Funktion:

$$F(x) = e^{x^2-1}$$

Stammfunktion der Funktion

$$f(x) = 2x \cdot e^{x^2-1}$$

ist und berechne die Fläche, welche durch den Funktionsgraphen, die x-Achse sowie $x = -2$ und $x = 2$ eingeschlossen wird.
Lösung:
Für $F(x)$ gilt für die Ableitung:

$$\begin{aligned} \text{i}(x) &= x^2 - 1\text{i}'(x) = 2x \\ \text{ä}(z) &= e^z\text{ä}'(z) = e^z \\ F'(x) &= 2x \cdot e^{x^2-1} \end{aligned}$$

Somit ist $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$.
Die Funktion $f(x)$ hat die Nullstelle 0, daher gilt:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^{0} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{2} f(x)\,dx \right| \\ &= |F(0) - F(-2)| + |F(2) - f(0)| \\ &= 19.72 + 19.72 \\ &= 39.44 \text{ FE} \end{aligned}$$

A2. Welche Fläche schließen die Funktionen

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 10 \text{ und } g(x) = 3x + 5$$

mit ihren Funktionsgraphen ein?
Lösung:
Zunächst muss die Differenzfunktion bestimmt werden:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 5x^2 + 2x + 10 - 3x - 5 \\ &= x^3 - 5x^2 - x + 5 \end{aligned}$$

Diese hat laut T.R. die Nullstellen: $x = -1$, $x = 1$ und $x = 5$. Somit lautet die gesuchte Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^{1} h(x)\,dx \right| + \left| \int_{1}^{5} h(x)\,dx \right| \\ &= \frac{20}{3} + \frac{128}{3} \\ &= \frac{148}{3} \approx 49.33 \text{ FE} \end{aligned}$$

A3. Es wird mit zwei normalen Würfeln (sechs Seiten) gewürfelt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für:

a) E_1: Es wurde mindestens eine 'Sechs' gewürfelt.
b) E_2: Es wurde mindestens eine durch 3 teilbare Zahl gewürfelt (also mindestens eine 'Sechs' und/oder eine 'Drei')
c) E_3: Die Augensumme ist eine Primzahl
d) E_4: Die Augensumme ist zweistellig

Lösung:
Die Möglichkeiten macht man sich am einfachsten in einer Tabelle klar:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

1	1/1 2	1/2 3	1/3 4	1/4 5	1/5 6	1/6 7
2	2/1 3	2/2 4	2/3 5	2/4 6	2/5 7	2/6 8
3	3/1 4	3/2 5	3/3 6	3/4 7	3/5 8	3/6 9
4	4/1 5	4/2 6	4/3 7	4/4 8	4/5 9	4/6 10
5	5/1 6	5/2 7	5/3 8	5/4 9	5/5 10	5/6 11
6	6/1 7	6/2 8	6/3 9	6/4 10	6/5 11	6/6 12

Damit haben die Ereignisse die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) $\frac{11}{36} \approx 0.306$

b) $\frac{20}{36} \approx 0.556$

c) $\frac{15}{36} \approx 0.417$

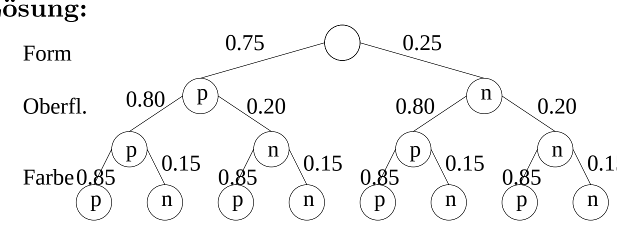
d) $\frac{6}{36} \approx 0.167$

A4. Bei der Produktion von Porzellangefäßen sind erfahrungsgemäß 25% derGefäße wegen schlechter Form, 15% wegen unsauberer Farbe und 20% wegen unregelmäßiger Oberfläche nicht 1. Wahl. Ein Porzellangefäß ist 2. Wahl, wenn es genau eine der Kontrollen nicht besteht. Besteht es mehr als eine Kontrolle nicht, ist es Ausschuss, der nicht verkauft wird.

a) Stelle die Kontrollen in einem Baumdiagramm dar. Überlege, in welcher Reihenfolge die Kontrollen am besten ausgeführt werden sollten.

b) Wie groß ist der Anteil der Gefäße 1. und 2. Wahl an der Gesamtproduktion?

Lösung:

a) 

b) Die Gefäße 1. Wahl liegen nur auf dem Pfad PPP. Die Wahrscheinlichkeit ist:

$$P(PPP) = 0.75 \cdot 0.80 \cdot 0.85 = 0.51 = 51\%$$

Die Gefäße zweiter Wahl liegen auf den drei Pfaden: PPN, PNP und NPP. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind:

$$\begin{aligned} P(PPN) + P(PNP) + P(NPP) &= 0.75 \cdot 0.80 \cdot 0.15 + 0.75 \cdot 0.20 \cdot 0.85 + 0.25 \cdot 0.80 \cdot 0.75 \\ &= 0.09 + 0.1275 + 0.17 \\ &= 0.3875 \end{aligned}$$

A5. Welche Wahrscheinlichkeit ist höher? Wird bei viermaligem Werfen mit einem Würfel eher eine 'Sechs' geworfen, oder bei 24 Würfen mit zwei Würfeln ein 'Sechser-Pasch' (Zwei Sechsen)?

Lösung:

In beiden Fällen ist es einfacher die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses zu berechnen:

$$\begin{aligned} P(\text{nicht } 6) &= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ &= \frac{625}{1296} \approx 0.482 \\ P(\text{kein Pasch}) &= \frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot \ldots \cdot \frac{35}{36} \\ &= \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \\ &\approx 0.509 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten berechnen sich nun jeweils als Gegenereignis:

$$P(6) = 1 - \frac{625}{1296} \approx 0.518$$

$$P(66) \approx 1 - 0.509 = 0.491$$

Die einzelne 'Sechs' hat tatsächlich eine etwas größere Wahrscheinlichkeit!

A6. Im Kreis Düren werden Kennzeichen vergeben, die außer der Ortkennung'DN' noch aus bis zu zwei Buchstaben und einer bis zu vierstelligen Zahl (außer 0) bestehen. (Tipp: Vergeben werden bei den Buchstaben nur die 26 regulären Buchstaben, keine Umlaute und auch kein ß.)

a) Wieviele Kennzeichen sind im Kreis Düren möglich, wenn man davon ausgeht, dass die Buchstabenkombinationen 'SS', 'SA', 'NS' und 'KZ' nicht vergeben werden?

b) Wieviele Kennzeichen wären möglich, wenn man zusätzlich fordert, dass in einem Kennzeichen kein Buchstabe und keine Ziffer doppelt vorkommen darf?

Lösung:

a) Pro Buchstabenkombination sind 9999 Kennzeichen. Bei den Buchstabenkombinationen handelt es sich um ein Ziehen mit Zurücklegen, es gibt also 26^2 Buchstabenkombinationen. Damit ergeben sich:

$$(26^2 - 4) \cdot 9999 = 672 \cdot 9999 = 6719328$$

Kennzeichen.

b) Hier handelt es sich um ein Ziehen ohne Zurücklegen. Dafür gibt es:

$$26 \cdot 25 - 3 = 647$$

und

$$\binom{10}{4} - 1 = \frac{10!}{6!} - 1 = \frac{3628800}{720} - 1 = 5040 - 1 = 5039$$

Möglichkeiten. Die Gesamtanzahl von Möglichkeiten ist daher:

$$647 \cdot 5039 = 3260233$$