A1. Ein Spiel wird nach den folgenden Regeln gespielt: Man würfelt mit zwei Würfeln und es zählt die Augensumme. Ist die Augensumme drei, erhält man einen Euro, ist es eine sechs, erhält man 2 Euro, bei einer neun bekommt man drei Euro und bei einer zwölf sogar fünf Euro. In allen anderen Fällen gewinnt man nichts. Welcher Einsatz sollte verlangt werden, damit das Spiel fair wird?
**Lösung:**
Möglich sind die 11 Ergebnisse von '2' bis '12'. Davon sind durch drei teilbar: '3', '6', '9' und '12'. Berechnet man die Gewinne oder Verluste, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} X = 3 &\longrightarrow 1 \\ X = 6 &\longrightarrow 2 \\ X = 9 &\longrightarrow 3 \\ X = 12 &\longrightarrow 5 \\ X = \text{sonst} &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Erwartungswert (mit den entsprechenden Häufigkeiten der Ergebnisse):

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{36}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1) \\ &= \frac{1}{36}(2 + 10 + 12 + 5) \\ &= \frac{29}{36} \approx 0.81 \end{aligned}$$

Der Einsatz sollte daher ca. 0.81 Euro betragen.

A2. In der folgenden Tabelle sind einige Zufallswerte und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten eines Zufallsexperiments angegeben. Bestimme für dieses Zufallsexperiment den Erwartungswert und die Standardabweichung.

| k | -1 | 1 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| P(X=k) | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{15}$ |

**Lösung:**
Zunächst muss der Erwartungswert berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mu &= -1 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{15} \\ &= -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Damit kann nun die Standardabweichung berechnet werden. Aus Gründen der Einfachheit wird zunächst die Varianz berechnet:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{10}(-1 - \frac{7}{5})^2 + \frac{1}{2}(1 - \frac{7}{5})^2 + \frac{1}{3}(2 - \frac{7}{5})^2 + \frac{1}{15}(5 - \frac{7}{5})^2 \\ &= 0.576 + 0.08 + 0.8533 + 0.864 \\ &= 2.3733 \\ \Leftrightarrow \quad \sigma &= \sqrt{2.3733} \approx 1.5406 \end{aligned}$$

A3. Der Bundestrainer der Hochseilartisten kann sich nicht entscheiden, ob er Bruno Springer oder Karl Daver zur Weltmeisterschaft schicken soll. Die Punktergebnisse der beiden in den letzten fünf Wettkämpfen war:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B. Springer | 6,2 | 5,5 | 5,7 | 8,1 | 7,4 |
| K. Daver | 7,3 | 6,2 | 5,8 | 6,3 | 7,1 |

Berate unter Berücksichtigung von Mittelwert und Standardabweichung den Trainer, wen von den beiden er besser zum Wettkampf schicken sollte.
**Lösung:**

Für beide muss der Mittelwert berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_{\text{B.S.}} &= \frac{1}{5}(6.2 + 5.5 + 5.7 + 8.1 + 7.4) \\
&= 6.58 \\
\overline{x}_{\text{K.D.}} &= \frac{1}{5}(7.3 + 6.2 + 5.8 + 6.3 + 7.1) \\
&= 6.54
\end{aligned}
$$

Damit kann nun die Varianz (und damit die Standardabweichung) berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{B.S.}} &= \frac{1}{5}\left((6.2 - 6.58)^2 + (5.5 - 6.58)^2 + (5.7 - 6.58)^2 + (8.1 - 6.58)^2 + (7.4 - 6.58)^2\right) \\
&= 0.3224 \\
\sigma_{\text{B.S.}} &= \sqrt{0.3224} \approx 0.5678 \\
V_{\text{K.D.}} &= \frac{1}{5}\left((7.3 - 6.54)^2 + \ldots\right) \\
&= 1.0134 \\
\sigma_{\text{K.D.}} &= \sqrt{1.0134} \approx 1.0067
\end{aligned}
$$

Mögliche Antworten:

a) B.Springer hat einen leicht besseren Mittelwert und sich in den letzten Wettkämpfen gesteigert, daher sollte er trotz größerer Standardabweichung zum Wettkampf geschickt werden.

b) K.Daver hat zwar einen etwas geringeren Mittelwert, wegen seiner größeren Konstanz in der Leistung sollte aber er zum Wettkampf geschickt werden

A4. Aus einem normalen Skatkartenspiel (32 Karten) werden nacheinander 10 Karten mit Zurücklegen gezogen. In dem Kartenspiel befinden sich vier Asse.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den Karten genau 4 Asse befinden (es müssen nicht unbegint die vier unterschiedlichen Asse sein!)

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich weniger als 2 Asse unter den 10 gezogenen Karten befinden.

Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeiten müssen explizit ausgerechnet werden, der Rechenweg muss erkennbar sein!

**Lösung:**

Es handelt sich in jedem Fall um ein Bernoulli-Experiment. Somit gilt:

a)

$$
\begin{aligned}
P(X = 4) &= \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^6 \\
&= 210 \cdot \frac{1}{4096} \cdot \frac{117649}{262144} \\
&\approx 0.0230
\end{aligned}
$$

b) Hier müssen zwei Wahrscheinlichkeiten berechnet und addiert werden:

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) + P(X - 1) &= \left(\binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{10}\right) + \left(\binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^9\right) \\
&= (1 \cdot 1 \cdot 0.2630\ldots) + \left(10 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0.3006\ldots\right) \\
&= 0.2630\ldots + 0.3758\ldots \\
&= 0.6388\ldots
\end{aligned}
$$

A5. Ein Hersteller produziert rote, blaue und grüne Murmeln. Er behauptet, dass alle drei Farben mit der gleichen Häufigkeit von je einem Drittel hergestellt werden. Bei Kindern sind die roten Murmeln besonders beliebt.

a) Wie lautet die Nullhypothese, wenn bezweifelt wird, dass es ein Drittel rote Murmeln sind?

b) In einem Säckchen des Herstellers sind immer 70 Murmeln. Gib mit der beigefügten Tabelle eine Entscheidungsregel für das Verwerfen oder Beibehalten der Nullhypothese an, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ sein soll.

c) Beschreibe den Fehler 1. und 2. Art. Für welchen der Fehler würde man eher den Begriff '*Käuferrisiko*' und für welchen den Begriff '*Herstellerrisiko*' verwenden?

**Lösung:**

a) Es ist: $H_0 : p = \frac{1}{3}$

b) Die Nullhypothese ist zu verwerfen, wenn weniger als 16 oder mehr als 34 rote Murmeln in dem Säckchen sind.

c)
- Bei einem Fehler 1. Art würde die Nullhypothese nicht verworfen, obwohl sie falsch ist. Es wäre also nicht ein Drittel der Murmeln rot, man würde (als Käufer) aber weiter davon ausgehen. Somit ist dies eher ein '*Käuferrisiko*'.
- Beim Fehler 2. Art würde man die Nullhypothese verwerfen, obwohl sie richtig ist. Es wären daher wirklich ein Drittel der Murmeln rot, aber man würde dem Hersteller vorwerfen, dass er falsche Angaben gemacht hat. Das ist eher ein '*Herstellerrisiko*'.

A6. (**Verständnisfrage**) Gib mit Hilfe der Tabelle an:

a) Welche Wahrscheinlichkeit hat man bei einem Stichprobenumfang von 70 auf genau 26 Treffer, wenn die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das man bei einer Trefferwahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{20}$ und einem Stichprobenumfang von 70 mindestens 2 und höchstens 4 Treffer hat?

**Lösung:**

a) Es ist:

$$P(X = 26) = 0.0206 - 0.0112 = 0.0094$$

b) Hier gilt:

$$P(2 \leq X \leq 4) = 0.7279 - 0.1292 = 0.5987$$

Kummulierte Häufigkeiten einer Binomialverteilung bei $n = 70$. Nich angegebene Werte sind gleich 1.

| **k** | p=$\frac{1}{100}$ | p=$\frac{1}{50}$ | p=$\frac{1}{20}$ | p=$\frac{1}{10}$ | p=$\frac{1}{3}$ | p=$\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | .4948 | .2431 | .0275 | .0006 | .0000 | .0000 |
| 1 | .8447 | .5904 | .1292 | .0054 | .0000 | .0000 |
| 2 | .9666 | .8349 | .3137 | .0241 | .0000 | .0000 |
| 3 | .9945 | .9481 | .5338 | .0712 | .0000 | .0000 |
| 4 | .9992 | .9867 | .7279 | .1587 | .0000 | .0000 |
| 5 | | .9971 | .8627 | .2872 | .0000 | .0000 |
| 6 | | .9994 | .9396 | .4418 | .0000 | .0000 |
| 7 | | | .9766 | .5988 | .0000 | .0000 |
| 8 | | | .9919 | .7362 | .0000 | .0000 |
| 9 | | | .9975 | .8414 | .0000 | .0000 |
| 10 | | | .9993 | .9127 | .0002 | .0000 |
| 11 | | | .9998 | .9559 | .0007 | .0000 |
| 12 | | | | .9795 | .0019 | .0000 |
| 13 | | | | .9912 | .0047 | .0000 |
| 14 | | | | .9965 | .0102 | .0000 |
| 15 | | | | .9987 | .0206 | .0000 |
| 16 | | | | .9995 | .0385 | .0000 |
| 17 | | | | .9998 | .0668 | .0000 |
| 18 | | | | | .1085 | .0000 |
| 19 | | | | | .1657 | .0000 |
| 20 | | | | | .2385 | .0002 |
| 21 | | | | | .3252 | .0005 |
| 22 | | | | | .4217 | .0012 |
| 23 | | | | | .5224 | .0027 |
| 24 | | | | | .6211 | .0057 |
| 25 | | | | | .7118 | .0112 |
| 26 | | | | | .7903 | .0206 |
| 27 | | | | | .8543 | .0361 |
| 28 | | | | | .9034 | .0598 |
| 29 | | | | | .9390 | .0941 |
| 30 | | | | | .9633 | .1409 |
| 31 | | | | | .9790 | .2014 |
| 32 | | | | | .9886 | .2752 |
| 33 | | | | | .9941 | .3601 |
| 34 | | | | | .9971 | .4524 |
| 35 | | | | | .9986 | .5475 |
| 36 | | | | | .9994 | .6398 |
| 37 | | | | | .9997 | .7247 |
| 38 | | | | | | .7985 |
| 39 | | | | | | .8590 |
| 40 | | | | | | .9058 |
| 41 | | | | | | .9401 |
| 42 | | | | | | .9638 |
| 43 | | | | | | .9793 |
| 44 | | | | | | .9887 |
| 45 | | | | | | .9942 |
| 46 | | | | | | .9972 |
| 47 | | | | | | .9987 |
| 48 | | | | | | .9994 |
| 49 | | | | | | .9997 |
| 50 | | | | | | |