

A1. Ein Reisebüro in Merzenich hat für die zweiwöchigen Osterferien in einem Hotel in der Türkei 90 Betten fest gebucht. Das bedeutet, dass diese Betten auch dann von dem Reisebüro gezahlt werden müssen, wenn weniger als 90 Menschen eine Reise in die Türkei buchen.

Aus Erfahrung weiß der Chef des Reisebüros, dass ungefähr 10% aller Buchungen vor Antritt der Reise wieder storniert werden, also die Kunden von der Reise wieder zurücktreten, bevor sie beginnt. Da die Reiserücktrittsversicherung in den seltensten Fällen zahlt und der Chef die Kunden nicht mit Kosten für abgesagte Reisen verärgern will, verfährt er nach dem sogenannten *Overbooking*-Prinzip. Das bedeutet, dass das Reisebüro nicht nur 90 Plätze in dem Hotel verkauft, sondern sogar 100, um sicher zu sein, dass inklusive der Absagen auch wirklich alle 90 Betten belegt sind. Tatsächlich gelingt es dem Reisebüro bis zu Beginn des Jahres 100 Plätze zu verkaufen.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Hotelbetten nicht ausreichen, dass also weniger als 10 Kunden absagen?

**Lösung:**

Es handelt sich um ein 100stufiges Experiment mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 0.1$ . Der Tabelle kann man entnehmen, dass gilt  $P(X \leq 9) = 0.4512$ . Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 45% reichen die Betten nicht aus.

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss der Chef des Reisebüros damit rechnen, dass in den Ferien mehr als 4 Betten nicht belegt sind?

**Lösung:**

Hier wird danach gefragt, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 14 Personen absagen, also  $P(X > 14) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - 0.9274 = 0.0726$ . Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 7% bleiben mehr als vier Betten leer.

Das Prinzip des *Overbookings* führt natürlich mitunter dazu, dass manche Kunden nicht in dem angebotenen Hotel untergebracht werden können, sondern in ein anderes Hotel verlegt werden müssen. Das führt natürlich zu großem Ärger bei den Kunden. Diesen Ärger bekommen allerdings die Angestellten des Reisebüros ab und nicht der Chef. Sie gehen im Unterschied zu ihrem Chef nicht davon aus, dass ungefähr 10% aller Buchungen storniert werden, sondern dass es wesentlich weniger als 10% sind. Um ihre Vermutung zu bestätigen, untersuchen die Angestellten die letzten 500 Buchungen und vergleichen sie mit der Anzahl der Absagen. Sie wollen sich aber nur dann mit dem Chef unterhalten, wenn sie sich ihres Ergebnisses sehr sicher sind.

- c) Mit wievielen Stornierungen muss man bei den 500 Buchungen 'auf lange Sicht' rechnen, wenn der Chef Recht hat?

**Lösung:**

Hier ist nach dem Erwartungswert gefragt:

$$\mu = 500 \cdot 0.1 = 50$$

Man sollte also mit 50 Stornierungen rechnen.

- d) Beschreibe den Test, den die Angestellten durchführen müssen (ohne Rechnung, aber z.B. mit Nullhypothese) und beschreibe auch die beiden möglichen Fehler, die ihnen unterlaufen könnten und entscheide, welchen dieser beiden Fehler die Angestellten auf jeden Fall vermeiden wollen.

**Lösung:**

Es handelt sich um einen einseitigen Hypothesentest. Die Nullhypothese lautet, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Absage größer oder gleich 10% ist. Beim Fehler **1. Art** würde die Nullhypothese verworfen, obwohl sie wahr ist, die Angestellten hätten demnach zwar Unrecht, würden sich aber trotzdem an den Chef wenden. Beim Fehler **2. Art** würde die Nullhypothese beibehalten obwohl sie falsch ist. Die Angestellten hätten zwar Recht, würden sich aber dennoch nicht an den Chef wenden. Den Fehler 1. Art sollten sie auf jeden Fall vermeiden.

- e) Stelle eine Entscheidungsregel für die Angestellten auf, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5% betragen darf.

**Lösung:**

Zunächst muss geprüft werden, ob die 'Abkürzung' genommen werden kann:

$$\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{500 \cdot 0.1 \cdot 0.9} \approx 6.71$$

mit gilt dann:

$$P(X) \leq 0.05 \Rightarrow k \leq 38$$

Wenn also weniger als 39 Kunden abgesagt haben, dann haben die Angestellten mit ihrer Vermutung wahrscheinlich recht.

- f) Tatsächlich haben bei den 500 Kunden 32 abgesagt. Welche Empfehlung würdest du den Angestellten gehen?

**Lösung:**

Da weniger als 39 Kunden abgesagt haben, sollten die Angestellten mit ihrem Chef reden.

- A2. Eine Großhandelsfirma wird von zwei Herstellern mit Energiesparlampen beliefert. Im Laufe der Jahre hat sich herausgestellt, dass 7,3% der Lampen von Hersteller A und 5,2% der Lampen von Hersteller B defekt sind.

- a) Von Hersteller A wird ein Karton Lampen mit 100 Stück geliefert. Wieviele Lampen muss man zufällig entnehmen, um mit 95%iger Sicherheit mindestens eine defekte Lampe entnommen zu haben?

**Lösung:**

Die Wahrscheinlichkeit mindestens eine defekte Lampe entnommen zu haben, ist die Gegenwahrscheinlichkeit davon keine defekte Lampe entnommen zu haben:

$$\begin{aligned} P(X \geq 0) &= 1 - P(X = 0) = 0.95 \\ 1 - \binom{n}{0} \cdot 0.073^0 \cdot 0.927^n &= 0.95 \\ 0.927^n &= 0.05 \\ n &= \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.927)} \\ n &\approx 39.52 \end{aligned}$$

Man muss mindestens 40 Lampen entnehmen.

- b) Ein Lehrling holt aus dem Lager (wo alle Lampen von Hersteller A und Hersteller B unsortiert aufbewahrt werden) zufällig eine Lampe. Es stellt sich heraus, dass diese defekt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie von Hersteller B stammt?

**Lösung:**

Hier muss der Anteil an der Gesamtwahrscheinlichkeit einer defekten Lampe berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{0.052}{0.073 + 0.052} &= \frac{0.052}{0.125} \\ &= 0.416 \end{aligned}$$

Die Lampe stammt mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 42% von Hersteller B.

- A3. Gegeben ist eine Kurvenschar durch die Funktionsgleichung:

$$f_k(x) = x^3 - (k+1)x^2 + kx$$

- a) Zeige durch geeignete Verfahren, dass die zu der Schar gehörenden Funktionen die Nullstellen  $x = 0$ ,  $x = 1$  und  $x = k$  haben.

**Lösung:**

Man erkennt sofort, dass man ein  $x$  ausklammern kann, damit ergibt sich:

$$f_k(x) = x(x^2 - (k+1)x + k)$$

Setzt man den quadratischen Term in die  $p, q$ -Formel ein, dann ergeben sich die Nullstellen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{k+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - k} \\ &= \frac{k+1}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2 + 2k + 1}{4} - \frac{4k}{4}} \\ &= \frac{k+1}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2 - 2k + 1}{4}} \\ &= \frac{k+1}{2} \pm \frac{k-1}{2} \\ x &= \frac{k+1}{2} + \frac{k-1}{2} \vee x = \frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} \\ x &= k = x = 1 \end{aligned}$$

- b) Bestimme für alle Funktionen der Kurvenschar die ersten drei Ableitungen (also in allgemeiner Form mit  $k$ ). Zur Kontrolle:  $f'''(x) = 6$ .

**Lösung:**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - (k+1)x^2 + kx \\ f'(x) &= 3x^2 - 2(k+1)x + k \\ f''(x) &= 6x - 2(k+1) \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

- c) Die zweite Ableitung ist einer lineare Funktion mit der Steigung 6 und die dritte Ableitung, wie oben angegeben die konstante Funktion  $f'''(x) = 6$ . Begründe aus diesen beiden Tatsachen, dass alle Funktionen der Kurvenschar einen Wendepunkt haben müssen.

**Lösung:**

Die zweite Ableitung ist eine lineare Funktion mit der Steigung 6. Daher geht sie von 'links unten' nach 'rechts oben' und **muss** eine Nullstelle haben. Da außerdem die dritte Ableitung immer ungleich Null ist, ist an der Nullstelle von  $f''(x)$  auch immer die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt erfüllt.

- d) Bestimme für  $k = 2$  alle Extremstellen.

**Lösung:**

Für  $k = 2$  gilt:

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= 3x^2 - 6x + 2 \\ f_2''(x) &= 6x - 6 \end{aligned}$$

Somit ist die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums  $f'(x) = 0$ :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= 0 \\ x &= 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x &\approx 0.42 \vee x \approx 1.58 \end{aligned}$$

Für die hinreichende Bedingung  $f'(x) = 4 \wedge f''(x) \neq 0$  gilt:

$$\begin{aligned} f''(0.42) &= -3.48 < 0 \Rightarrow \text{Max.} \\ f''(1.58) &= 3.48 > 0 \Rightarrow \text{Min.} \end{aligned}$$

Der Hochpunkt befindet sich daher bei:  $HP(0.42/0.38)$  und der Tiefpunkt bei  $TP(1.58/ -0.38)$

- e) Begründe, dass für  $k = 2$  der Wendepunkt bei  $WP(1/0)$  liegen muss.

**Lösung:**

Eine Funktion dritten Grades ist immer punktsymmetrisch zum Wendepunkt. Da die Funktion die Nullstellen  $x = 0, x = 1$  und  $x = 2$  hat, muss die mittlere Nullstelle auch Wendepunkt sein (Abstand zu den anderen Nullstellen ist gleich!).

Alternativ für  $k = 2$  ist  $f_2''(x) = 6x - 6$ , welche die Nullstelle  $x = 1$  hat.

- f) Berechne die Fläche, welche die Funktion für  $k = 2$  zwischen Funktionsgraphen und  $x$ -Achse einschließt.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^2 f(x) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### Tabellen für Aufgabe 1

In der folgenden Tabelle sind die addierten (lummulierten) Wahrscheinlichkeiten für  $n = 100$  (Spalten 1 bis 4) und für  $n = 500$  (Spalten 5 bis 10) aufgeführt. Nicht angegebene Werte sind entweder bis auf die vierte Stelle hinter dem Komma gleich Null oder Neun.

$n = 100$				$n = 500$					
k	p=0.1	k	p=0.1	k	p=0.1	k	p=0.1	k	p=0.1
0	.0000	18	.9954	26	.0000	44	.2079	62	.9656
1	.0003	19	.9980	27	.0001	45	.2546	63	.9749
2	.0019	20	.9991	28	.0002	46	.3060	64	.9820
3	.0078	21	.9996	29	.0005	47	.3611	65	.9873
4	.0237	22	.9998	30	.0010	48	.4189	66	.9911
5	.0575	23	.9999	31	.0017	49	.4781	67	.9939
6	.1171			32	.0029	50	.5375	68	.9959
7	.2060			33	.0049	51	.5957	69	.9972
8	.3208			34	.0079	52	.6516	70	.9982
9	.4512			35	.0123	53	.7040	71	.9988
10	.5831			36	.0186	54	.7523	72	.9992
11	.7030			37	.0274	55	.7957	73	.9995
12	.8018			38	.0393	56	.8341	74	.9997
13	.8761			39	.0550	57	.8673	75	.9998
14	.9274			40	.0750	58	.8955	76	.9999
15	.9601			41	.1001	59	.9190		
16	.9794			42	.1305	60	.9381		
17	.9899			43	.1664	61	.9535		