Ohne Hilfsmittel!

Q_2 I **1.Klausur** **27.9.2017**

A1. Berechne jeweils:

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

c) $3\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}$ d) $2\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}$ f) $2\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\cdot(-3)\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

A2. Für eine geschlossene Vektorkette aus drei Vektoren gilt:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

Weiterhin ist

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}$$

Bestimme $\vec{c}$!

A3. Berechne jeweils den Wert für x, damit die folgenden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}x\\2\\2\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\-2\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\x\end{pmatrix}$

A4. Untersuche die folgenden Vektoren jeweils aus lineare Abhñgigkeit

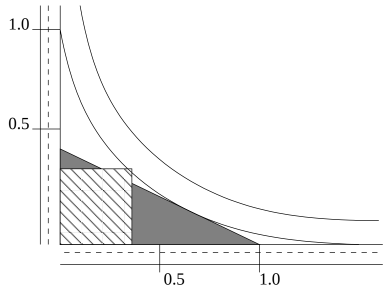
a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

Mit Hilfsmittel!

A5. An einer Kreuzung zweier Straßen soll ein Parkplatz gebaut werden. Die zur Verfügung stehende Fläche wird durch einen Fluss begrenzt, der in diesem Bereich ungefähr der Funktion

$$f(x) = e^{-x}$$

entspricht.



Eine Einheit entspricht dabei 100m.
Es gibt zwei Vorschläge den Parkplatz zu bauen. Bei der ersten Variante soll der Parkplatz ein Rechteck werden (gestrichelte Fläche) in der zweiten ein Dreieck (gegraute Fläche).

a) Wenn man davon ausgeht, dass $r(x)$ die Funktion ist, mit der, bei gewähltem x, die Fläche des rechteckigen Parkplatzes berechnet werden kann, dann weise rechnerisch nach, dass:

$$r'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$
$$r''(x) = xe^{-x} - 2e^{-x}$$

die beiden ersten Ableitungen dieser Funktion sind.

b) Bestimme den Wert von x, bei der die rechteckige Parkplatzfläche maximal wird und die Fläche des Parkplatzes (in Quadratmetern), die sich dann ergibt.

c) Bei der dreieckigen Variante wäre eine der Parkplatzseiten eine Tangente an den Fluss. Für einen beliebig gewählten Berührpunkt zu dem x-Wert $x = a$. Ergeben sich die Schnittstellen der Tangente mit den Koordinatenachsen zu: $S_1(0/e^{-a}(1+a))$ und $S_2(1+a/0)$. Die Dreiecksfläche die sich ergibt hat daher das Maß:

$$d(a) = \frac{(1+a)e^{-a} \cdot (1+a)}{2} = \frac{1}{2}(1+a)^2 e^{-a}$$

.

Zeige rechnerisch, dass die Ableitungsfunktion dieser Flächenfunktion:

$$d'(a) = \frac{1}{2}e^{-a}[2(1+a) - (1+a)^2]$$

ist.

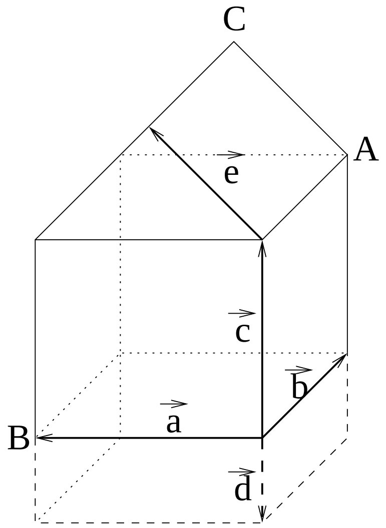
d) Zeige rechnerisch, dass die Funktion $d(a)$ bei $a = 1$ ein Maximum haben **kann** (Der Nachweis der hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich).

e) Berechne für $a = 1$ die dreieckige Parkplatzfläche und entscheide, welche Parkplatzform gewählt werden sollte.

A6. Die Kanten eines Hauses, bestehend aus eigentlichem Haus, Keller und einem Dachgeschoss, lassen sich durch die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreiben, wobei eine Einheit einem Meter entspricht.



a) Wie groß ist die Wohnfläche des Hauses, wenn du davon ausgehst, dass das eigentliche Haus zwei Etagen hat, das Dachgeschoss nur zur Hälfte und der Keller gar nicht zur Wohnfläche gerechnet wird?

b) Beschreibe die Strecke von A nach B und die Strecke von B nach C jeweils mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ und $\vec{e}$. (Hinweis: Es müssen ggf. nicht alle Vektoren verwendet werden!)

c) Wie hoch ist das Haus vom Erdboden bis zur Dachspitze?

A7. Ein Dreieck ist gegeben durch die Punkte: A(1/2/0), B(2/-3/1) und C(0/-2/1).

a) Weise rechnerisch nach, dass die drei Seiten des Dreiecks sich durch die Vektoren:

$$\vec{a} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellen lassen.

b) Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

c) Wie groß sind die Innenwinkel des Dreiecks?

A8. Weise nach, dass das Dreieck mit den Eckpunkten A(2/7/1), B(3/9/4) und C(5/7/0) rechtwinklig ist und berechne seinen Flächeninhalt.

A9. Löse die folgenden Gleichungen nach $\vec{x}$ auf.

a) $n\vec{a} + m\vec{x} = n\vec{b}$ b) $m\vec{x} + n\vec{a} = n\vec{b} - m\vec{x}$

A10. Gegeben seine die Vektoren

$$\vec{x}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda \in I\!R$ eine beliebige reele Zahl sein soll. Zeichne einige der Vektoren (für verschiedene Werte von λ) in ein Koordinatensystem, wobei du jeweils im Koordinatenursprung beginnst. Wo liegen alle Vektorenendpunkte?

Ohne Hilfsmittel!

Q_2 I **1.Klausur** **Nachschreiber**

A1. Berechne jeweils:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ f) $2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-3) \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

A2. Für eine geschlossene Vektorkette aus drei Vektoren gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

Weiterhin ist

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Bestimme $\vec{c}$!

A3. Berechne jeweils den Wert für x, damit die folgenden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ x \end{pmatrix}$

A4. Untersuche die folgenden Vektoren jeweils aus lineare Abhñgigkeit

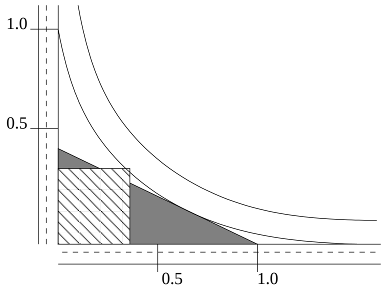
a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -15 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Mit Hilfsmittel!

A5. An einer Kreuzung zweier Straßen soll ein Parkplatz gebaut werden. Die zur Verfügung stehende Fläche wird durch einen Fluss begrenzt, der in diesem Bereich ungefähr der Funktion

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$$

entspricht.



Eine Einheit entspricht dabei 100m.

Es gibt zwei Vorschläge den Parkplatz zu bauen. Bei der ersten Variante soll der Parkplatz ein Rechteck werden (gestrichelte Fläche) in der zweiten ein Dreieck (gegraute Fläche).

a) Wenn man davon ausgeht, dass $r(x)$ die Funktion ist, mit der, bei gewähltem x, die Fläche des rechteckigen Parkplatzes berechnet werden kann, dann weise rechnerisch nach, dass:

$$r'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$$
$$r''(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}$$

die beiden ersten Ableitungen dieser Funktion sind.

b) Bestimme den Wert von x, bei der die rechteckige Parkplatzfläche maximal wird und die Fläche des Parkplatzes (in Quadratmetern), die sich dann ergibt.

c) Bei der dreieckigen Variante wäre eine der Parkplatzseiten eine Tangente an den Fluss. Für einen beliebig gewählten Berührpunkt zu dem x-Wert $x = a$. Ergibt sich die Fläche zu

$$d(a) = (1 + a + \frac{1}{4}a^2)e^{-\frac{1}{2}a}$$

Zeige rechnerisch, dass die Ableitungsfunktion dieser Flächenfunktion:

$$d'(a) = (-\frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{2}) \cdot e^{-\frac{1}{2}a}$$

ist.

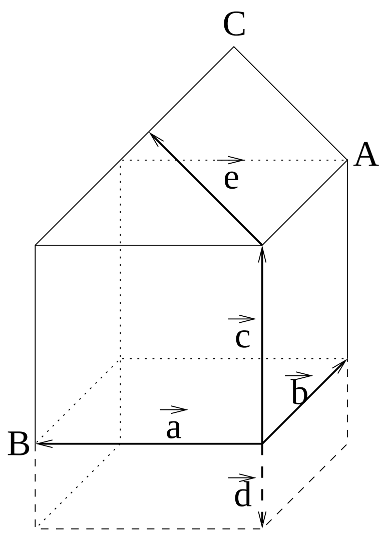
d) Zeige rechnerisch, dass die Funktion $d(a)$ bei $a = 2$ ein Maximum haben **kann** (Der Nachweis der hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich).

e) Berechne für $a = 2$ die dreieckige Parkplatzfläche und entscheide, welche Parkplatzform gewählt werden sollte.

A6. Die Kanten eines Hauses, bestehend aus eigentlichem Haus, Keller und einem Dachgeschoss, lassen sich durch die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreiben, wobei eine Einheit einem Meter entspricht.



a) Wie groß ist die Wohnfläche des Hauses, wenn du davon ausgehst, dass das eigentliche Haus zwei Etagen hat, das Dachgeschoss nur zur Hälfte und der Keller gar nicht zur Wohnfläche gerechnet wird?

b) Beschreibe die Strecke von A nach B und die Strecke von B nach C jeweils mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ und $\vec{e}$. (Hinweis: Es müssen ggf. nicht alle Vektoren verwendet werden!)

c) Wie hoch ist das Haus vom Erdboden bis zur Dachspitze?

A7. Ein Dreieck ist gegeben durch die Punkte: A(1/2/0), B(2/-3/1) und C(0/-2/1).

a) Weise rechnerisch nach, dass die drei Seiten des Dreiecks sich durch die Vektoren:

$$\vec{a} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellen lassen.

b) Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

c) Wie groß sind die Innenwinkel des Dreiecks?

A8. Weise nach, dass das Dreieck mit den Eckpunkten A(1/0/1), B(-2/0/2) und C(2/2/4) rechtwinklig ist und berechne seinen Flächeninhalt.

A9. Löse die folgenden Gleichungen nach $\vec{x}$ auf.

a) $n\vec{a} + m\vec{x} = n\vec{b}$ b) $m\vec{x} + n\vec{a} = n\vec{b} - m\vec{x}$

A10. Gegeben seine die Vektoren

$$\vec{x}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda \in I\!R$ eine beliebige reele Zahl sein soll. Zeichne einige der Vektoren (für verschiedene Werte von λ) in ein Koordinatensystem, wobei du jeweils im Koordinatenursprung beginnst. Wo liegen alle Vektorenendpunkte?