Ohne Hilfsmittel!

Q_2 I **2.Klausur** **7.12.2017**

Auf dem Blatt zu lösen

A1. Gib zu den folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind und begründe deine Entscheidung. (Bei einem 'falsch' reicht ein Gegenbeispiel).

a) Wenn zwei Geraden kollineare Richtungsvektoren haben, dann schneiden sie sich.

b) Wenn zwei Ebenen (e_1 und e_2) sich schneiden, dann hat das Gleichungssystem $e_1 = e_2$ unendlich viele Lösungen.

c) Von vier Vektoren ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$) ist bekannt, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander senkrecht stehen und auch $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{d}$. Außerdem ist bekannt, dass zwischen $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein Winkel von 35° liegt.
Nun die Aussage: Zwischen $\vec{a}$ und $\vec{d}$ liegt ein Winkel von ebenfalls 35°.

Lösung:

a) Falsch. Die Geraden können dann nur noch identisch oder parallel sein.

b) Wahr. Die Schnittlinie besteht aus unendlich vielen Punkten, die in e_1 und e_2 liegen.

c) Falsch. Zwischen ihnen kann jeder beliebige Winkel liegen.

A2. Gib jeweils die Lösung des Gleichungssystems an. (Wenn **eine** Lösung, dann die Zahlenwerte der Lösung, sonst '**keine** Lösung' oder '∞ viele Lösungen').

a) $\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$ b) $\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

Lösung:

a) x=1, y=2

b) ∞ viele Lösungen

A3. Bestimme rechnerisch jeweils die gegenseitige Lage (Verwende ggf. auch die Rückseite).

a) $P(6/1/5)$
$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $P(3/5/5)$
$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Das Gleichungssystem $\vec{p} = \vec{x}$ hat die Form:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Welches offenbar die Lösung $r = 5$ hat. Somit liegt der Punkt auf der Geraden.

b) Das Gleichungssystem $\vec{p} = \vec{x}$ hat die Form:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile ergibt sich $r = 2$ und aus der dritten $s = 4$. Setzt man diese Werte in die zweite Zeile ein, ergibt sich: $5 = 2 + 4$, was offenbar falsch ist. Der Punkt liegt also nicht in der Ebene.

Mit Hilfsmittel!

A4. Bestimme jeweils die gegenseitige Lage der folgenden Geraden. Wenn die Geraden sich schneiden, dann bestimme zusätzlich Schnittpunkt und Schnittwinkel.

a) $$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

d) $$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat keine Lösung. Weiterhin sind die Richtungsvektoren der Geraden Vielfache voneinander, also sind die Geraden **parallel**.

b) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat keine Lösung. Da die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind, sind die Geraden **windschief**.

c) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat unendlich viele Lösungen, daher sind die Geraden **identisch**.

d) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat die Lösungen $r = -3$ und $s = 2$. Daraus ergibt sich der Schnittpunkt $SP(2/1/2)$. Der Schnittwinkel beträgt: $\alpha = 60°$. (Aus: $1 = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\alpha$)

A5. Zeige rechnerisch, dass die angegebene Gerade die angegebene Ebene schneidet und berechne dann den Schnittpunkt.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Das sich ergebende Gleichungssystem hat die Form:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}$$

und hat damit dei Lösung: $r = \frac{2}{3}$, $t = -\frac{1}{3}$ und $s = -\frac{2}{3}$. Setzt man r in g ein, erhält man als Schnuittpunkt: $SP(\frac{7}{3}/\frac{7}{3}/2)$

A6. Ein Flugzeug fliegt in einer Ebene, die mit der Gleichung:

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden kann. Das jeweils erste Element gibt dabei die Ost-West-Richtung, das zweite die Nord-Süd-Richtung und das dritte Element die Höhe an.

An welchem Punkt der Ebene muss das Flugzeug den Landeanflug beginnen, wenn der Zielflughafen die Koordinaten: $F(3/1/0)$ hat und das Flugzeug sich mit dem (Richtungs)Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dem Flughafen nähern soll?
Lösung:
Gesucht ist der Schnittpunkt, der Gerade, die vom Zielflughafen dem Richtungsvektor (ungekehrt) folgt mit der Flugebene. Das Gleichungssystem lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & | & 2 \\ 2 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & | & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & -2 & 4 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 \end{array}$$

Somit ergeben sich die Lösungen: $r = 1$, $s = -5.5$ und $t = -4$. Setzt man t in die Geradengleichung ein, erhält man:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dies ist der Ortsvektor zu dem Punkt, an dem der Landeanflug begonnen werden muss.

A7. Ein Schiff fährt vom Punkt $A(4/6/1)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Das erste Element gibt die Ost-West-Richtung, das zweite die Nord-Süd-Richtung und das dritte die Höhe über Meeresspiegel an). Ein weiteres Schiff ährt von $B(1/6/1)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für das Durchfahren des Richtungsvektors brauchen beide Schiffe jeweils eine Stunde.

a) Berechne den Punkt, an dem sich die Fahrtstrecken der Schiffe kreuzen.
b) Berechne unter welchem Winkel sich die Fahrtstrecken schneiden?
c) Gib begründet an, ob sich die Schiffe treffen, oder weit aneinander vorbei fahren.
d) Gib begründet an, ob die Schiffe im Meer, auf einem See oder auf einem Fluss fahren.

Lösung:

a) Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die beiden Schiffe fahren:

$$\begin{pmatrix} 4][6 \\ 1 \\ + \end{pmatrix} r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen: $r = -3$ und $s = -3$. Setzt man $r = -3$ in die erste Gleichung ein, erhält man mit:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

den Ortsvektor des Treffpunkts.

b) Es ist:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \cos(\alpha) \\ 45^\circ &= \alpha \end{aligned}$$

Sie treffen sich unter einem Winkel von 45°.

c) Da beide jeweils drei Stunden bis zum Treffpunkt unterwegs sind, werden sie sich treffen.
d) Sie fahren höher als der Meeresspiegel, aber diese Höhe ändert sich nicht. Sie fahren vermutlich auf einem See.

Ohne Hilfsmittel!

Q_2 I **2.Klausur** **7.12.2017**

Auf dem Blatt zu lösen

A1. Gib zu den folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind und begründe deine Entscheidung. (Bei einem 'falsch' reicht ein Gegenbeispiel).

a) Wenn zwei Geraden kollineare Richtungsvektoren haben, dann sind sie parallel oder identisch.

b) Wenn zwei Ebenen (e_1 und e_2) sich schneiden, dann hat das Gleichungssystem $e_1 = e_2$ genau eine Lösung.

c) Von vier Vektoren ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$) ist bekannt, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander senkrecht stehen und auch $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{d}$. Außerdem ist bekannt, dass zwischen $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein Winkel von 35° liegt.
Nun die Aussage: Zwischen $\vec{a}$ und $\vec{d}$ liegt ein Winkel von 145°.

Lösung:

a) Wahr. Bei sich schneidenden oder windschiefen Geraden sind die Richtungsvektoren nicht kollinear.

b) Falsch. Die gemeinsame Schnittlinie hat unendlich viele Punkte, daher hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

c) Falsch. Zwischen ihnen kann jeder beliebige Winkel liegen.

A2. Gib jeweils die Lösung des Gleichungssystems an. (Wenn **eine** Lösung, dann die Zahlenwerte der Lösung, sonst '**keine** Lösung' oder '∞ viele Lösungen').

a) $\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$ b) $\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$

Lösung:

a) Keine Lösungen

b) x=1, y=-2, z=4

A3. Bestimme rechnerisch jeweils die gegenseitige Lage (Verwende ggf. auch die Rückseite).

a) $P(4/1/3)$
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $P(3/4/4)$
$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Das Gleichungssystem $\vec{p} = \vec{x}$ hat die Form:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Welches offenbar die Lösung $r = 3$ hat. Somit liegt der Punkt auf der Geraden.

b) Das Gleichungssystem $\vec{p} = \vec{x}$ hat die Form:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile ergibt sich $r = 2$ und aus der dritten $s = 3$. Setzt man diese Werte in die zweite Zeile ein, ergibt sich: $4 = 2 + 3$, was offenbar falsch ist. Der Punkt liegt also nicht in der Ebene.

Mit Hilfsmittel!

A4. Bestimme jeweils die gegenseitige Lage der folgenden Geraden. Wenn die Geraden sich schneiden, dann bestimme zusätzlich Schnittpunkt und Schnittwinkel.

$$\text{a)}\qquad g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)}\qquad g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\qquad g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)}\qquad g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat die Lösung $r = 2$ und $s = 3$. Daraus ergibt sich der Schnittpunkt zu $S(1/1/0)$ und der Schnittwinkel zu: $\alpha = 90°$. Das Skalarprodukt der Reichtungsvektoren ist Null.

b) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat keine Lösung. Da die Richtungsvektoren keine Vielfache voneinander sind, sind die Geraden **windschief**.

c) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat keine Lösung, da die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, sind die Geraden **parallel**.

d) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat unendlich viele Lösungen, die Geraden sind **identisch**.

A5. Zeige rechnerisch, dass die angegebene Gerade die angegebene Ebene schneidet und berechne dann den Schnittpunkt.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Das sich ergebende Gleichungssystem hat die Form:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \end{array}$$

Es hat somit die Lösungen $r = 8/over5 = 1.6$, $s = -\frac{4}{5} = -0.8$ und $t = -\frac{1}{5} = -0.2$. Setzt man r ind g ein erhält man den Schnittpunkt: $S(3.6/1/4.2)$.

A6. Ein Flugzeug fliegt in einer Ebene, die mit der Gleichung:

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden kann. Das jeweils erste Element gibt dabei die Ost-West-Richtung, das zweite die Nord-Süd-Richtung und das dritte Element die Höhe über dem Boden an.

Wo liegt der Zielflughafen, wenn das Flugzeug bei $L(-3/4/8)$ den Landeanflug beginnt und von da an dem (Richtungs)Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

folgt?

Lösung:

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden, die sich aus Anfangspunkt des Landeanflugs und dem Richtungsvektor ergibt mit der Erdbodenebene. Da diese Ebene die dritte Koordinate 0 haben muss, reicht es die Gleichung:

$$8 + r(-2) = 0$$

zu lösen. Diese hat offenbar die Lösung $r = 4$. Setzt man diesen Wert in die obige Gerade ein, ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man den Ortsvektor zum Landeflughafen.

A7. Ein Schiff fährt vom Punkt $A(4/6/1)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Das erste Element gibt die Ost-West-Richtung, das zweite die Nord-Süd-Richtung und das dritte die Höhe über Meeresspiegel an). Ein weiteres Schiff ährt von $B(5/3/1)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für das Durchfahren des Richtungsvektors brauchen beide Schiffe jeweils eine Stunde.

a) Berechne den Punkt, an dem sich die Fahrtstrecken der Schiffe kreuzen.
b) Berechne unter welchem Winkel sich die Fahrtstrecken schneiden?
c) Gib begründet an, ob sich die Schiffe treffen, oder weit aneinander vorbei fahren.
d) Gib begründet an, ob die Schiffe im Meer, auf einem See oder auf einem Fluss fahren.

Lösung:

a) Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die beiden Schiffe fahren:

$$\begin{pmatrix} 4][6 \\ 1 \\ + \end{pmatrix} r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen: $r = -3$ und $s = -2$. Setzt man $r = -3$ in die erste Gleichung ein, erhält man mit:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

den Ortsvektor des Treffpunkts.

b) Es ist:

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\alpha) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \cos(\alpha) \\ 45^\circ &= \alpha \end{aligned}$$

Sie treffen sich unter einem Winkel von 45°.

c) Das erste Schiff braucht 3 Stunden zum Schnittpunkt, das zweite Schiff 2 Stunden. Sie fahren weit aneinander vorbei.

d) Sie fahren höher als der Meeresspiegel, aber diese Höhe ändert sich nicht. Sie fahren vermutlich auf einem See.

Ohne Hilfsmittel!

Q_2 I **2.Klausur19.1.2018**

Auf dem Blatt zu lösen

A1. Gib zu den folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind und begründe deine Entscheidung. (Bei einem 'falsch' reicht ein Gegenbeispiel).

a) Wenn eine Gerade in einer Ebene liegt oder parallel zu ihr liegt, dann sind die drei Richtungsvektoren (einen der Gerade und zwei der Ebene) linear abhängig.

b) Wenn eine Gerade (g) eine Ebene (e) schneidet, dann hat das Gleichungssystem $g = e$ unendlich viele Lösungen.

c) Wenn zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Winkel von 45° liegt, dann ist auch $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.5$.

Lösung:

a) Wahr.

b) Falsch.

c) Falsch.

A2. Gib jeweils die Lösung des Gleichungssystems an. (Wenn **eine** Lösung, dann die Zahlenwerte der Lösung, sonst '**keine** Lösung' oder '∞ viele Lösungen').

a) $\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$ b) $\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$

Lösung:

a) x=1, y=2

b) Unendlich viele Lösungen.

A3. Bestimme rechnerisch jeweils die gegenseitige Lage (Verwende ggf. auch die Rückseite).

a) $P(4/1/3)$ $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $P(3/4/4)$ $e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Das Gleichungssystem $\vec{p} = \vec{x}$ hat die Form:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Welches offenbar die Lösung $r = 3$ hat. Somit liegt der Punkt auf der Geraden.

b) Das Gleichungssystem $\vec{p} = \vec{x}$ hat die Form:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile ergibt sich $r = 2$ und aus der dritten $s = 3$. Setzt man diese Werte in die zweite Zeile ein, ergibt sich: $4 = 2 + 3$, was offenbar falsch ist. Der Punkt liegt also nicht in der Ebene.

Mit Hilfsmittel!

A4. Bestimme jeweils die gegenseitige Lage der folgenden Geraden. Wenn die Geraden sich schneiden, dann bestimme zusätzlich Schnittpunkt und Schnittwinkel.

a) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat die Lösung $r = 2$ und $s = 3$. Daraus ergibt sich der Schnittpunkt zu $S(1/2/3)$ und der Schnittwinkel zu: $\alpha = 60°$. Das Skalarprodukt der Reichtungsvektoren ist 1.

b) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat keine Lösung. Da die Richtungsvektoren keine Vielfache voneinander sind, sind die Geraden **windschief**.

c) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat keine Lösung, da die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, sind die Geraden **parallel**.

d) Das Gleichungssystem $g_1 = g_2$ hat unendlich viele Lösungen, die Geraden sind **identisch**.

A5. Zeige rechnerisch, dass die angegebene Gerade die angegebene Ebene schneidet und berechne dann den Schnittpunkt.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Das sich ergebende Gleichungssystem hat die die Lösung: $r = -\frac{5}{2}, s = t = -\frac{3}{2}$
r ind g ein erhält man den Schnittpunkt: $S(-1.5/-0.5/0)$.

A6. Ein Flugzeug fliegt in einer Ebene, die mit der Gleichung:

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden kann. Das jeweils erste Element gibt dabei die Ost-West-Richtung, das zweite die Nord-Süd-Richtung und das dritte Element die Höhe an.
An welchem Punkt der Ebene muss das Flugzeug den Landeanflug beginnen, wenn der Zielflughafen die Koordinaten: $F(3/1/0)$ hat und das Flugzeug sich mit dem (Richtungs)Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dem Flughafen nähern soll?

Lösung:

Gesucht ist der Schnittpunkt, der Gerade, die vom Zielflughafen dem Richtungsvektor (ungekehrt) folgt mit der Flugebene. Das Gleichungssystem lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & & 2 \\ 2 & 2 & -2 & & -1 \\ 0 & 0 & 2 & & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & & 2 \\ 0 & -2 & 4 & & -5 \\ 0 & 0 & 1 & & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & & 2 \\ 0 & 1 & -2 & & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & & -4 \end{array}$$

Somit ergeben sich die Lösungen: $r = 1$, $s = -5.5$ und $t = -4$. Setzt man t in die Geradengleichung ein, erhält man:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dies ist der Ortsvektor zu dem Punkt, an dem der Landeanflug begonnen werden muss.

A7. Ein Schiff fährt vom Punkt $A(2/3/1)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Das erste Element gibt die Ost-West-Richtung, das zweite die Nord-Süd-Richtung und das dritte die Höhe über Meeresspiegel an). Ein weiteres Schiff ährt von $B(-1/3/0)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für das Durchfahren des Richtungsvektors brauchen beide Schiffe jeweils eine Stunde.

a) Berechne den Punkt, an dem sich die Fahrtstrecken der Schiffe kreuzen.
b) Berechne unter welchem Winkel sich die Fahrtstrecken schneiden?
c) Gib begründet an, ob sich die Schiffe treffen, oder weit aneinander vorbei fahren.
d) Gib begründet an, ob die Schiffe im Meer, auf einem See oder auf einem Fluss fahren.

Lösung:

a) Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die beiden Schiffe fahren. Da das entsprechnde Gleichungssystem die Lösungen: $r = -1$ und $s = 1$ hat, erhält man den Schnittpunkt durch Einsetzen in eine der Geradengleichungen zu: S(1/2/0).
b) Das Skalarprodukt der Richtungsvektoren ist 1, die Längen $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$. Daraus ergibt sich der Schnittwinkel von $\alpha = 75°$.
c) Beide Schiffe brauchen eine Stunde bis zum Kreuzungspunkt, sie treffen sich also.
d) Sie fahren auf einem Fluss, da sich zumindest die Höhe des einen Schiffes über dem Meeresspiegel ändert.